Содержание

[Введение](#_Toc170621782).................................................................................................5

[Глава 1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА](#_Toc170621783)..............................................................................................7

1.1. Проблемы теории и возможностей применения

дельта[-преобразований](#_Toc170621784)....................................................................7

[1.2. Постановка задачи Д-преобразования второго порядка](#_Toc170621785).............................................................................................16

[1.3. Принципы решения задачи оптимизации Д-преобразований](#_Toc170621786)

второго порядка...............................................................................18

[1.4. Двоичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе](#_Toc170621787) вторых разностей...........................................................................................20

[1.5. Двоичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе двойного интегрирования](#_Toc170621788)................................................................................24

[1.6. Троичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе вторых разностей](#_Toc170621789)...........................................................................................26

[1.7. Троичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе двойного интегрирования](#_Toc170621790)................................................................................28

[1.8. Оценка длительности переходного процесса при отсутствии внешних воздействий](#_Toc170621791)......................................................................30

[1.9. Обобщенные оценки ошибки установившегося процесса Д-преобразований при наихудших воздействиях](#_Toc170621792)............ .............31

[1.10. Оптимизация установившегося процесса при наихудших внешних возмущающих воздействиях](#_Toc170621793)..........................................32.

[1.11. Оценки длительностей переходных процессов. Условия оптимизации переходного процесса](#_Toc170621794)..............................................35

[1.12. Оптимизация установившихся и переходных процессов Д-преобразований второго порядка при наихудших внешних возмущающих воздействиях](#_Toc170621795)...........................................................37

[1.13. Адаптивная оптимизация по точности Д-преобразований второго порядка при произвольных по характеру изменения неконтролируемых внешних воздействиях](#_Toc170621796)...................................38

Контрольные вопросы.......................................................................43

[Глава 2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ ДЕЛЬТА–ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА](#_Toc170621798)..................45

2.1. Дельта-преобразования второго порядка и оптимизация

цифрового управления...................................................................45

[2.2. Теоретические положения синтеза алгоритмов цифрового управления на основе оптимизированных Д-преобразований второго порядка](#_Toc170621800)..............................................................................48

[2.3. Пример синтеза алгоритма цифрового управления для нелинейной модели](#_Toc170621802).........................................................................55

Контрольные вопросы............................................................

[Глава 3. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ Д-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА](#_Toc170621808).............63

[3.1. Параллельные вычислительные процессы и Д-преобразования](#_Toc170621809).................................................................................................63

[3.2. Пример алгоритмизации параллельного решения систем линейных алгебраических уравнений](#_Toc170621812)...........................................65

Контрольные вопросы.....................................................................68

[Глава 4. ОБРАБОТКА И СЖАТИЕ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ Д-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА](#_Toc170621813)...................................69

[4.1. Особенности использования алгоритмов Д-преобразований второго порядка для обработки](#_Toc170621814) сигналов....................................69

[4.2. Алгоритмизация процессов преобразования со сглаживанием](#_Toc170621815)..................................................................................71

[4.3. Сжатие информации на основе Д-преобразований второго порядка](#_Toc170621816).............................................................................................75

[4.4. Особенности применения дельта-преобразований второго порядка для защиты сигналов от несанкционированного доступа](#_Toc170621817)..............................................................................................80

Контрольные вопросы......................................................................83

[Глава 5. ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПОВ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА](#_Toc170621819).............................................................................................84

[5.1. Дельта-преобразования второго порядка и постановка задачи построения сплайна](#_Toc170621820)........................................................................84

[5.2. Алгоритмизация построения сплайн-функций на основе дельта-преобразований второго порядка](#_Toc170621822)..................................................86

Контрольные вопросы.....................................................................91

Библиографический список..........................................................92

# Введение

Динамические аспекты окружающего мира можно рассматривать как совокупное взаимодействие процессов управления, обработки информации, ее хранения и передачи. Известные методологии решения определенных практических задач в рамках этих процессов в математической реализации, как правило, существенно специфичны и освещены в отдельных отраслях знаний. В то же время эти методологии не лишены недостатков, ограничивающих возможности их практического использования, по крайней мере, при определенных условиях.

На кафедре математического обеспечения и применения ЭВМ Южного федерального университета разработана теория оптимизированных дельта-преобразований (Д-преобразований) второго порядка, позволяющая строить математически устойчивые процессы преобразований и на основе единой математической базы подходить к эффективному решению многих научных и прикладных задач.

Можно выделить, например, следующие возможности, обусловленные применением оптимизированных Д-преобразований второго порядка и характеризующие рассматриваемые подходы как “универсальные”:

– для систем управления – единая простая инженерная методика синтеза алгоритмов цифрового управления (с дискретным шагом) для линейных и нелинейных объектов; обеспечение устойчивости; оптимизация по быстродействию и точности; получение гарантированных показателей качества на конечных интервалах; оптимизация по точности с адаптацией к неконтролируемым произвольным по характеру изменения внешним возмущающим воздействиям; управление объектом, уравнения движения которого содержат ограниченные нестационарные параметры; оперирование с постоянно изменяющимися задающими воздействиями; синтез алгоритмов управления для систем с частичной структурной и параметрической неопределенностями;

– для обработки функций (сигналов) – сжатие непрерывно-дискретного представления функции, алгоритмическая простота (малая трудоемкость) сжатия и восстановления, сглаживание и оптимизация по быстродействию отработки ступени (переходный процесс) модулируемой функции, а также по точности в конце этого процесса;

– для параллельных проблемно-ориентированных вычислительных средств – повышение производительности (увеличение шага решения) по сравнению с использованием прототипных методов решения задач на основе дельта-преобразований первого порядка, сокращение элементных ресурсов БИС и информации обмена, упрощение средств коммутации и уменьшение времени обмена, однородность вычислительной структуры;

– для задач с использованием сплайн-функций на основе дельта-преобразований второго порядка – простота алгоритмов и соответственно малая вычислительная трудоемкость;

– для защиты сигналов от несанкционированного доступа – выполнение важных для эффективного защитного кодирования условий: размер одного сообщения – один бит (дельта-бит), закон распределения сообщений близок к равновероятному, изменение хотя бы одного дельта-бита на противоположное по значению приводит к разрушению восстанавливаемого сигнала; в сочетании с другими видами защитного кодирования может обеспечиваться высокая степень защиты информации в сообщениях при выполнении условий простоты и малой вычислительной трудоемкости алгоритмов защиты в целом.

В рамках указанных возможностей использования дельта-преобразований второго порядка на кафедре разработаны программная система аудио-видеоконференц-связи с компрессией звука и изображений, алгоритмы автоматического управления сложными нелинейными подвижными объектами, методы формирования графических изображений с использованием сплайн-функций, защиты сигналов. По данным направлениям защищены диссертации.

Освещение перечисленных выше вопросов и является основой настоящего учебного пособия. На кафедре с 1996 г. для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов читается курс лекций "Цифровое управление, сжатие и параллельная обработка информации на основе оптимизированных дельта-преобразований второго порядка", который полностью поставлен на упомянутых научных результатах.

В учебном пособии освещены вопросы, имеющие непосредственное отношение к возможности получения конечного практического результата. Сложные математические выводы, которые обосновывают получение важных для практического использования алгоритмов и оценок, но непосредственно не используются для решения прикладных задач, в пособии не приводятся. Приведенные в данной работе результаты можно рассматривать, вероятно, как исходные для дальнейших исследований. Разделы пособия сформулированы таким образом, чтобы по их содержанию можно было выделять индивидуальные задания, темы курсовых и дипломных работ, ориентировать научную работу магистрантов и аспирантов.

Фрагменты настоящего учебного пособия неоднократно публиковались в статьях различных изданий, освещались на конференциях, апробировались в рамках диссертационных, научно-исследовательских, а также учебных лабораторных работ, что частично освещено в прилагаемом списке литературы.

Дисциплина “Цифровое управление, сжатие и параллельная обработка информации на основе оптимизированных дельта-преобразований второго порядка” имеет междисциплинарный характер. В рамках освоения дисциплины реализуется интегрированное использование и закрепление знаний, полученных на предшествующих курсах обучения (дифференциальные уравнения, приближенные методы вычислений, линейная алгебра, теория кодирования информации, построение моделей сложных систем, теория автоматического управления, обработка информации, программирование), а также освоение нового математического аппарата оптимизированных дельта-преобразований второго порядка и возможностей его эффективного применения для решения прикладных задач в различных научно-технических областях.

В содержании данного учебного пособия при упоминании или освещении широко известного в печати материала с целью уменьшения приводимого в конце перечня литературы не всегда приводятся ссылки на соответствующие источники (более подробные ссылки можно увидеть в работе [16]).

# **ГЛАВА 1** ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## 1.1. Проблемы теории и возможностей применения дельта-преобразований

В основе дельта-преобразования (Д-преобразования) лежит выполняющееся с достаточно малым шагом построение (аппроксимация) для данной непрерывной или непрерывно-дискретной функции некоторой приближенной функции, у которой высшие разности или производные определенного порядка (кванты) на интервале преобразования одинаковы по модулю и отличаются по знаку [2, 7, 35 ]. Использование Д-преобразования позволяет заменить операции, выполняющиеся над многоразрядными кодами представления ординат функций, более простыми операциями над квантами, которые могут принимать значения, например, +1 и --1. Благодаря этому при проектировании различных цифровых устройств и систем оказывается возможным сократить объемы пересылаемой и хранимой информации, повысить производительность, точность обработки информации, уменьшить затраты оборудования (устройств умножения, регистров, объём информации обмена и запоминающих устройств), упростить средства коммутации, повысить пропускную способность каналов связи, создавать проблемно-ориентированные вычислительные средства с параллельной организацией для решения задач управления и вычислительной математики, и эти возможности особенно широко использовались в третьей четверти прошлого века [1, 2, 25, 31, 34, 35]. Д-преобразование (дельта-модуляция) впервые было предло­жено в конце сороковых годов [7, 40]. Наибольшую известность получили виды Д-преобразования, демодуляция в которых выполняется на основе использования первых разностей, а также однократного интегрирования [1, 2, 31, 35]. В дальнейшем эти виды будем называть Д-преобразованием первого порядка.

Рассмотрим сущность Д-преобразования первого порядка. Пусть *y(t) –* модулируемая (преобразуемая) функция, *t –* независимая переменная и Д-преобразование выполняется с достаточно малым шагом *t* в моменты времени . Тогда известные простейшие алгоритмы Д-преобразования первого порядка можно записать в приводимом ниже виде.

1. Двоичное Д-преобразование с демодуляцией на основе

а) первых разностей:

– модуляция



– демодуляция (1.1а)

   *i =* 0, 1, 2, ... ;

б) однократного интегрирования:

– модуляция

– демодуляция (1.1.б)

   *i=* 0, 1, 2, ... ;

(запись эквивалентна соотношениям  ).

2. Троичное Д-преобразование с демодуляцией на основе

а) первых разностей:

– модуляция 



 (1.2.а)

- демодуляция

   *i =* 0, 1, 2, ... ;

б) однократного интегрирования:

– модуляция



 (1.2.б)

– демодуляция

   *i =* 0, 1, 2, ... ;

(запись эквивалентна соотношениям ).

В приведенных алгоритмах термин “модуляция” означает формирование знака кванта преобразования Δ*i+1*, термин ”демодуляция” – формирование аппроксимирующей функции. Значения  *i =* 0, 1, 2,... – ординаты преобразуемой функции,  – ординаты аппроксимирующей функции, соответствующие моментам времени , *i =* 0, 1, 2,... (,  – значения переменных в начальный момент времени), ,  – приращение и производная аппроксимирующей функции для (*i*+1)-го шага (кванты преобразования);  – ошибка преобразования; >0 – постоянная величина, определяющая вес модуля кванта преобразования  ; *sign(0)* = +1 или *sign(0)* = 1.

Исходные уравнения, лежащие в основе приведенных выше преобразований первого порядка, можно представить в следующем виде:

а) разностное



б) дифференциально-разностное



В приведенных алгоритмах отражены различные варианты Д-преобразования первого порядка:

а) двоичное ({+1; 1});

б) троичное ({+1;0; l});

в) с представлением кванта преобразования в виде разности первого порядка ();

г) с представлением кванта преобразования в виде производной первого порядка ().

Алгоритмы (1.1), (1.2) относятся к наиболее простым с точки зрения практической реализации. На рис. 1.1 иллюстрируется характер протекания процессов Д-преобразования первого порядка при преобразовании ступенчатого изменения функции *y(t)*.

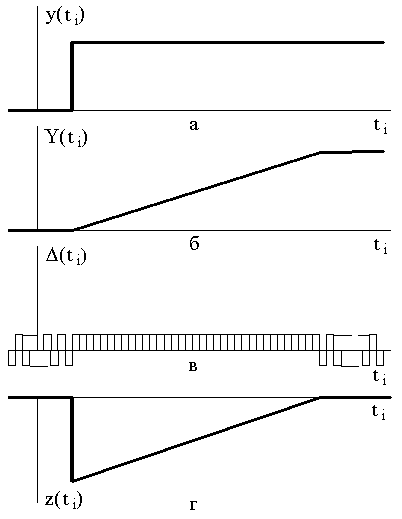


Рис. 1.1. Характер изменения  и  (г) при отработке ступени на основе дельта-преобразования первого порядка

Дельта-преобразования первого порядка при выполнении определенных требований по точности характеризуются низкой производительностью, существенно ограничивающей допустимую скорость изменения преобразуемой функции *y(t).* Это обусловлено медленным характером изменения демодулированной функции на основе малых значений квантов преобразования**.** На рис. 1.2 представлен пример изменения переменных при работе с "перегрузкой" по крутизне. При этом под "перегрузкой по крутизне" понимается такой характер преобразования, когда скорость изменения преобразуемой функции превышает предельно достижимую скорость изменения аппроксимирующей функции.











Рис. 1.2. Характер изменения модулируемой и демодулированной переменных при Д-преобразовании первого порядка при условиях работы с "перегрузкой" по крутизне

В связи с отмеченным выше, возможность улучшения характеристик Д-преобразования уже давно естественно связывалась с разработкой методов более высоких порядков, когда демодуляция выполняется на основе разностей второго и более высоких порядков или многократного интегрирования, и формируются многоразрядные (переменные по значению) приращения аппроксимирующей функции. Впервые метод Д-преобразования на основе двойного интегрирования (вторых разностей) освещен в работе [38], а в дальнейшем развит в работах других авторов [1, 24, 35, 38]. Однако преобразования, выполняемые с помощью известных алгоритмов такого типа, при условиях работы с перегрузкой по крутизне характеризуются неустойчивостью, сильными колебаниями ошибки. Эти колебания слабо затухают не только после снятия перегрузки, но и при переходе в состояние “молчания”, когда модулируемая функция равна нулю. В известных алгоритмах Д-преобразования второго порядка знак кванта преобразования определяется в зависимости от знака ошибки, образуемой на данном шаге между преобразуемой и аппроксимирующей функциями, т.е. по сути как и в алгоритмах (1.1), (1.2). Некоторое улучшение стабильности путем введения прогноза на один-два шага вперед при неизменном модуле кванта преобразования обеспечивается только в установившемся процессе. При отработке же больших ошибок, например ступени модулируемой функции, прогноз в пределах небольшого фиксированного числа шагов оказывает слабое влияние на уменьшение колебательного характера переходного процесса Д-преобразователя с двойным итерированием, являющегося неустойчивой следящей системой [2, 24, 35]. Проблематичными по отмеченным выше показателям качества являются и методы, базирующиеся на многоуровневом квантовании и компандировании.

В теории автоматического управления существуют аналогичные по математической постановке задачи, которые можно обобщенно сформулировать как синтез оптимальных по быстродействию цифровых систем управления (аналогия: синтез оптимального по быстродействию Д-преобразования) объектами, описание которых содержит последовательное соединение [23]:

а) импульсного элемента и двух интегрирующих звеньев (аналогия: демодулятор Д-преобразования, функционирующий на основе вторых разностей);

б) интерполятора нулевого порядка и двух интегрирующих звеньев (аналогия: демодулятор Д-преобразования, функционирующий на основе двойного интегрирования и постоянного по модулю кванта на интервале преобразования).

Дальнейшее рассмотрение задачи Д-преобразования в рамках данного раздела будем увязывать с оптимальными по быстродействию системами.

В оптимальных по быстродействию системах переходные процессы протекают за кратчайший отрезок времени, совместимый с ограничениями, наложенными на систему. Критерий оптимальности определяется минимумом функционала:

,

где  и   время начала и конца процесса регулирования.

В теории автоматического управления задача построения алгоритмов оптимального по быстродействию непрерывного управле­ния объектом типа двух интегрирующих звеньев имеет классическое решение и освещена в работах А.А. Фельдбаума, А.А. Павлова и других авторов [28, 36]. В 1956 г. Л.С. Понтрягиным и его учениками был сформулирован принцип максимума, который позволил подвести под ранее полученные результаты по оптимальным быстродействиям единый математический аппарат [32].

Описание объекта управления с линейной частью из двух интегрирующих звеньев можно записать с помощью следующего дифференциального уравнения с заданными начальными условиями [23, 28]:

, (1.3)

где  – координаты состояния объекта (ошибка управления); *Р* – постоянный коэффициент;  – управляющее воздействие (), *G*(*t*) – приведенные к управляющему воздействию эквивалентные возмущающие воздействия (рис.1.3).





Объект  
управления



Устройство управления (регулятор) 

Рис. 1.3. Упрощенная структурная схема системы управления объектом с описанием в виде двух последовательных интегрирующих звеньев

Тогда известный алгоритм непрерывного оптимального по быстродействию управления объектом такого типа для случая  записывается в виде [26]:

 (1.4)

где  – переключающая функция.

На рис. 1.4 показан характер протекания переходного процесса (изменение и ) с использованием (1.4) для (1.3)).



Рис. 1.4. Диаграммы оптимального процесса непрерывного управления непрерывной системой второго порядка ()

Развитие вычислительной техники и включение цифровых вычислительных машин в контур управления привело к необходимости постановки и решения задач оптимизации по быстродействию процессов цифрового управления непрерывными и дискретными объектами. Особенностями этих процессов являются дискретизация временного интервала (пошаговое формирование и отработка управляющих воздействий), появляющиеся при этом задержки в формировании управляющего воздействия и автоколебательный характер изменения ошибки.

Наиболее близкие из известных решений задачи оптимального по быстродействию цифрового управления объектом с линейной частью из двух интегрирующих звеньев освещены в работе Крутько П.Д. “Синтез нелинейных законов управления дискретных систем” [23]. Недостатком данного алгоритма является то, что даже при условии = 0, *i* =0,1,2,.. в системе управления могут иметь место перерегулирования, приводящие к значительной длительности переходного процесса. Кроме того, максимальная ошибка в установившемся процессе не минимизирована и может достигать больших значений.

Математическая взаимосвязь процессов цифрового управления и Д-преобразований второго порядка состоит в том, что уравнения (1.3) и лежащие в основе соответствующих Д-преобразований оказываются эквивалентными. В связи с этим и использование упомянутых выше алгоритмов для организации процессов Д-преобразования характеризуется теми же отмеченными выше недостатками.

Одним из базовых результатов, освещаемых в данном учебном пособии, является получение алгоритмов Д-преобразований, оптимальных по быстродействию и точности. На рис.1.5 иллюстрируется характер изменения аппроксимирующей функции  при отработке ступени преобразуемой функции  на основе различных алгоритмов Д-преобразований:

а) Д-преобразование первого порядка ();

б) Д-преобразование второго порядка с управлением знаком кванта преобразования по знаку ошибки ();

в) Д-преобразование второго порядка, выполняемое на основе освещенных в работе [23] алгоритмов () ;

г) оптимизированное Д-преобразование второго порядка ().



Рис. 1.5. Характер изменения демодулированных функций при обработке скачка  на основе различных алгоритмов дельта-преобразования

Наименьшие значения длительности переходного процесса и уровня максимальной ошибки в установившемся процессе обеспечиваются при использовании оптимизированного Д-преобразования второго порядка. Данное обстоятельство, а также ряд других важных свойств оптимизированных Д-преобразований второго порядка легли в основу новых эффективных методов обработки информации и цифрового управления, которые также в определенной мере освещены в данном учебном пособии.

## 1.2. Постановка задачи Д-преобразования второго порядка

Рассмотрим более подробно постановку задачи Д-преобразования второго порядка и введем некоторые необходимые для дальнейшего рассмотрения определения.

*Дельта-преобразование второго порядка*  это способ построения (аппроксимации) для преобразуемой функции  в дискретные моменты изменения независимой переменной  соответствующих приближенных (аппроксимирующих) значений    начальное значение ,   шаг преобразования,   номер шага, ,  При этом значения разностей второго порядка  () или производных второго порядка   на *i-*мшаге преобразования постоянны и принимают значения только из некоторого ограниченного множества величин. Значения  или   кванты преобразования.

*Установившийся процесс* на участке   по аналогии с принятым в теории автоматического управления процесс, характеризующийся постоянным действием ограниченных по модулю возмущающих воздействий   и ограниченной достаточно малой ошибкой преобразования , где   максимальное значение модуля ошибки установившегося процесса, которое может быть априорно оценено как функция от . Если указанные условия для  не выполняются, но установившийся процесс существует, то процесс будем называть переходным. Рассматриваются также установившиеся процессы, оцениваемые по средним на интервалах значениям модулей ошибки.

В предыдущем параграфе было обращено внимание на важность обеспечения высокого качества переходного и установившегося процессов. Для переходного процесса это требование выражается в необходимости уменьшения его длительности (количества шагов) при обработке  до наступления установившегося процесса, а для установившегося процесса  в необходимости уменьшения его максимальной ошибки  Кроме того, с целью обеспечения возможности варьирования качественными характеристиками установившегося процесса (ошибкой , гладкостью аппроксимирующей функции ) представляют известный интерес алгоритмы Д-прео6разования для следующих случаев представления кванта преобразования на интервале преобразования:

а) значения модулей кванта постоянны и не равны нулю (двоичное Д-преобразование);

б) значения модулей кванта постоянны по величине или равны нулю (троичное Д-преобразование).

Для случая *а)* вводим  для *б)* соответственно , где  – функция знака кванта преобразования (символьное обозначение “дельта”). Троичное преобразование в рамках данной работы формируется на базе обобщенной теории двоичного Д-преобразования.

Будем рассматривать Д-преобразования второго порядка, которые описываются разностными и дифференциально-разностными уравнениями следующего вида:

а)  (1.5а)

 начальные условия;

(демодуляция на основе вторых разностей);

б) ; (1.5б)

 начальные условия;

(демодуляция на основе двойного интегрирования).

Здесь . вещественные достаточно малые постоянные на определенном интервале преобразования величины .

В дальнейшем с целью сокращения объема изложения будем рассматривать одновременно оба указанных выше вида Д-преобразования и обозначения фор­мул представлять в виде *X.Wа* и *X.Wб*, где *X* – номер главы, *W* – номер формулы в главе *X*, *a* – формула, связанная с описанием процесса на основе вторых разностей, *б* – формула, связанная с описанием процессов на основе двойного интегрирования. При ссылке одновременно на обе формулы *X.Wа* и *X.Wб* используется обозначение *X.W*. По сходной причине используются также обозначения *X.Wа,* *X.Wб* и *X.Wв.*

## 1.3. Принципы решения задачи оптимизации Д-преобразований второго порядка

Известны принципы построения оптимальных систем при наличии возмущающих воздействий. Сущность этих принципов заключается в том, что выявляются наиболее неблагоприятные (наихудшие) воздействия и с учетом этих воздействий строится оптимальный по быстродействию и точности процесс, характеризующийся свойствами оптимального процесса без возмущений или, по крайней мере, с наилучшими показателями при наихудших условиях работы. При этом оптимальное решение рассчитывается на наихудший случай, а во всех других более благоприятных случаях характеристики процесса преобразования оказываются, по крайней мере, достаточно близкими к оптимальным. Дан­ный принцип решения задачи строится на основе минимаксного критерия оптимальности, базирующегося на получении наилучшего результата в наихудшей ситуации [5]. Системы, построенные на основе этого принципа, называют минимаксно-оптимальными. Применение данного подхода позволяет получать "гарантирующие" качественные оценки для наи­худших вариантов.

Будем называть допустимыми такие ограниченные по модулю воздействия, при которых процесс Д-преобразования существует [5]. К наихудшим воздействиям будем относить такие допустимые воздействия, которые приводят к наибольшей ошибке установивше­гося и наибольшей длительности переходного процессов.

В качестве возмущающих воздействий при рассмотрении решений уравнений (1.5) можно выделить:

1. Задержки в переключении знака кванта преобразования, обуслов­ленные дискретным характером изменения независимой переменной (  конечная величина); влияние особенностей двоичного или троичного принципов формирования кванта преобразования; влияние значений приращений (производных) в точке переключения знака, значений ошибки в экстремальных точках (внутренние возмуще­ния).

2. Все другие виды возмущений (внешние возмущения), эквива­лентное действие которых представляется с помощью переменных 

Влияние внутренних воздействий определяет качественные ха­рактеристики в режиме, когда отсутствуют постоянно действующие внешние возмущения и проявляется "собственный шум" преобразо­вания.

Исследования базируются на основе поэтапной оптимизации.

Оптимизация на первом этапе этого направления выполняется с использо­ванием принципа: построение при наихудших внутренних воздействиях процесса Д-преобразования, характеризующегося свойствами оптимального по быстродействию и точности аналогичного процесса без возмущений.

Данные условия оптимизации можно проиллюстрировать следующей записью:

 (1.6)

Здесь с помощью  условно обозначено действие наихудших внутренних воздействий. В соответствии с (1.6) предполагается, что при оптимальном по точности Д-преобразовании обеспечивается в установившемся процессе такое управление с помощью квантов преобразования, что при наличии  ошибка  не превосходит мини­мального из всех возможных максимальных уровней.

Первый этап заключается в построении алгоритмов Д-преобразования и соответственно завершается точным решением задачи оптимизации.

Изменение ошибки Д-преобразования в установившемся процессе при наихудших воздействиях носит колебательный характер. В связи с этим любой интервал изменения ошибки между двумя соседними вершинами можно также рассматривать как участки траекторий переходного процесса. Это, в частности, позволяет подойти с единых позиций к решению задачи одновременной алгоритмической оптимизации переходных и установившихся процессов.

Конечной целью оптимизации на втором этапе является установление условий и выбор таких соотношений параметров в алгоритме Д-преобразования, чтобы при наихудших внешних, а с учетом изложенного выше, и внутренних возмущений:

а) ошибка преобразования в установившемся процессе соответствовала минимальному уровню из всех возможных максимальных



б) длительность переходного процесса была наименьшей.

Справедливость и достаточность приведенных выше исходных положений для решения поставленной задачи оптимизации обуславливается тем, что на их основе выполнено построение алгоритмов Д-преобразований, а также получены необходимые качественные оценки и ограничения, определяющие условия существования оптимизированных процессов преобразования с указанными выше характеристиками [ 8, 9, 14, 16, 17].

## 1.4. Двоичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе вторых разностей

Алгоритм двоичного Д-преобразования на основе вторых разностей записывается в следующем виде:

- модуляция



- демодуляция (1.7)



В приведенном алгоритме термины «модуляция» и «демодуляция» означают те же понятия, что и введенные для алгоритмов (1.1) и (1.2); *yi* = *y*(*ti*) – значение преобразуемой функции на *i*-м шаге в момент времени *ti*, *i* = 0,1,2,…; *ti*=*t*0+*i*∇*t*; ∇*t* – постоянный шаг дельта-преобразования; *Yi* – значение аппроксимирующей функции на *i*-м шаге ( – начальное значение); ∇*Yi*+1 – первая разность аппроксимирующей функции ( – начальное значение первой разности); *zi* – ошибка преобразования на *i*-м шаге; ∇*zi* – первая разность ошибки; *Fi* – переключающая (прогнозирующая) функция; ∇2*Yi*+1 – вторая разность аппроксимирующей функции (квант преобразования); sign(*x*) ∈{1;+1}, причем  или .

В установившемся процессе при отсутствии постоянно действующих внешних возмущающих воздействий ошибка не превышает 1,25 ( ), т.е. 

Пример работы алгоритма при ,,  проиллюстрирован на рис. 1.6 (на кривой  выделены значения отсчетов в точках дискретизации) и приведен в табл. 1.1. В примере демонстрируется проявление наибольшей из всех возможных ошибок преобразования (действие наихудших внутренних воздействий) в установившемся процессе при кодировании линейно изменяющейся преобразуемой функции. В частности, указанные в табл. 1.1 значения  соответствуют формированию наихудших воздействий.

Особенности работы алгоритмов Д-преобразований при соотношении  рассмотрены в разд. 1.10.

Рис. 1.6. Переходный и установившийся процессы дельта-преобразования при

отработке линейной функции и наихудших внутренних воздействиях

Таблица 1.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шаг *i* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | -28,75 | 0 | 28,75 | -0,50 | 28 |  | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -28,25 | -1 | 27,25 | -1,50 | 24 |  | -1 | -1 | -2 |
| 2 | -27,75 | -3 | 24,75 | -2,50 | 18 |  | -1 | -1 | -3 |
| 3 | -27,25 | -6 | 21,25 | -3,50 | 10 |  | -1 | -1 | -4 |
| 4 | -26,75 | -10 | 16,75 | -4,50 | 0 | +1 | -1 | -1 | -5 |
| 5 | -26,25 | -15 | 11,25 | -5,50 | -12 |  | 1 | 1 | -4 |
| 6 | -25,75 | -19 | 6,75 | -4,50 | -10 |  | 1 | 1 | -3 |
| 7 | -25,25 | -22 | 3,25 | -3,50 | -8 |  | 1 | 1 | -2 |
| 8 | -24,75 | -24 | 0,75 | -2,50 | -6 |  | 1 | 1 | -1 |
| 9 | -24,25 | -25 | -0,75 | -1,50 | -4 |  | 1 | 1 | 0 |
| 10 | -23,75 | -25 | -1,25 | -0,50 | -2 |  | 1 | 1 | 1 |

Окончание табл. 1.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Шаг *i* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 11 | -23,25 | -24 | -0,75 | 0,50 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 12 | -22,75 | -22 | 0,75 | 1,50 | 4 |  | -1 | -1 | 1 |
| 13 | -22,25 | -21 | 1,25 | 0,50 | 2 |  | -1 | -1 | 0 |
| 14 | -21,75 | -21 | 0,75 | -0,50 | 0 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 15 | -21,25 | -22 | -0,75 | -1,50 | -4 |  | 1 | 1 | 0 |
| 16 | -20,75 | -22 | -1,25 | -0,50 | -2 |  | 1 | 1 | 1 |
| 17 | -20,25 | -21 | -0,75 | 0,50 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 18 | -19,75 | -19 | 0,75 | 1,50 | 4 |  | -1 | -1 | 1 |
| 19 | -19,25 | -18 | 1,25 | 0,50 | 2 |  | -1 | -1 | 0 |
| 20 | -18,75 | -18 | 0,75 | -0,50 | 0 | +1 | -1 | -1 | -1 |
| 21 | -18,25 | -19 | -0,75 | -1,50 | -4 |  | 1 | 1 | 0 |
| 22 | -17,75 | -19 | -1,25 | -0,50 | -2 |  | 1 | 1 | 1 |
| 23 | -17,25 | -18 | -0,75 | 0,50 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 24 | -16,75 | -16 | 0,75 | 1,50 | 4 |  | -1 | -1 | 1 |
| 25 | -16,25 | -15 | 1,25 | 0,50 | 2 |  | -1 | -1 | 0 |

На рис. 1.7 представлен разностно-фазовый портрет процесса Д-преобразования, построенный на основе рассмотренного алгоритма. Пунктирной линией обозначены точки, где значения прогнозирующей функции  равны нулю (=0) (линия переключения знака кванта преобразования). Пунктирной замкнутой линией в начале координат выделена область, ограничивающая значения ошибки в установившемся процессе. Непрерывные сплошные линии  фазовые траектории, причем, точками на этих линиях выделены значения ординат  и приращений , соответствующие дискретным моментам времени. Кружочком выделены точки траекторий, на которых происходит переключение знака кванта преобразования (). В области выше линии   ниже ; при переходе через указанную линию происходит изменение знака кванта на противоположное значение.



Рис. 1.7. Разностно-фазовый портрет двоичного Д-преобразования

На рис. 1.8 представлен разностно-фазовый портрет, на котором сплошными линиями показаны оптимальные траектории, соответствующие наихудшим внутренним воздействиям, а пунктирными – траектории при внутренних воздействиях, не соответствующих наихудшим. В точках, где = 0, исходящие две стрелки показывают возможные направления движения в зависимости от выбора ****=+1 или **** = –1 и дальнейшего движения по траектории соответственно с наихудшими воздействиями или без них.



Рис. 1.8. Разностно-фазовый портрет двоичного Д-преобразования (выделены траектории с наихудшими внутренними воздействиями)

Примеры, приведенные выше, а также в других разделах данной главы нацелены на иллюстрацию работоспособности полученных алгоритмов Д-преобразований. Возможности и особенности использования этих алгоритмов для решения определенных прикладных задач рассмотрены в других главах монографии.

## 1.5. Двоичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе двойного интегрирования

Алгоритм двоичного Д-преобразования с демодуляцией на основе двойного интегрирования запишем в следующем виде:

– модуляция







– демодуляция

 (1.8)

(двойное интегрирование  на -ом шаге

эквивалентно выполнению соотношений





В (1.10)  Последние формулы для оценки  следуют из выражений применительно к связи *i*-го и (*i*+1)-го шагов, а также получаются при двойном интегрировании  на интервале  при начальных значениях  и .

В установившемся процессе при отсутствии постоянно действующих внешних возмущающих воздействий  максимальная ошибка для  не превышает 1,125.

Пример преобразования с помощью алгоритма (1.8) при наихудших внутренних воздействиях приведен в табл. 1.2. Принято: ; ; .

Построение и анализ примеров для алгоритмов (1.10), (1.11), (1.13) и (1.14) компактно и удобно выполнять в упрощенном виде на основе следующих соотношений, получаемых с учетом указанных значений ,  и :

Таблица 1.2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | или |  |  |  |
| 0 | 29 | 0,5 | 28 | 1 |  |
| 1 | 28 | 1,5 | 24 | 1 |  |
| 2 | 26 | 2,5 | 18 | 1 |  |
| 3 | 23 | 3,5 | 10 | 1 |  |
| 4 | 19 | 4,5 | 0 | 1 | +1 |
| 5 | 14 | 5,5 | 12 | +1 |  |
| 6 | 9 | 4,5 | 10 | +1 |  |
| 7 | 5 | 3,5 | 8 | +1 |  |
| 8 | 2 | 2,5 | 6 | +1 |  |
| 9 | 0 | 1,5 | 4 | +1 |  |
| 10 | 1 | 0,5 | 2 | +1 |  |
| 11 | 1 | 0,5 | 0 | +1 | 1 |
| 12 | 0 | 1,5 | 4 | 1 |  |
| 13 | 1 | 0,5 | 2 | 1 |  |
| 14 | 1 | 0,5 | 0 | 1 | +1 |
| 15 | 0 | 1,5 | 4 | +1 |  |
| 16 | см. |  |  |  |  |
| 17 | см. | и т.д. |  |  |  |

Алгоритм (1.8) построен с использованием производной ошибки. Однако более удобным при цифровой реализации может быть использование не производной, а приращения ошибки. Для случая отсутствия постоянно действующих внешних возмущений ( на интервале преобразования, что соответствует условиям построения алгоритмов Д-преобразования) [16]:



и соответственно



Но тогда переход к алгоритму с приращениями ошибки может быть осуществлен путем простой замены переменных. В результате алгоритм двоичного Д-преобразования с приращениями ошибки и демодуляцией на основе двойного интегрирования принимает эквивалентный (для случая отсутствия внешних возмущений) вид:

– модуляция







– демодуляция

 (1.9)

(двойное интегрирование  на -м шаге

эквивалентно выполнению соотношений





В установившемся процессе при отсутствии внешних воздействий максимальная ошибка преобразования для  также не превышает . Для иллюстрации работоспособности алгоритма (1.9) может быть использован пример, рассмотренный для алгоритма (1.8) в табл. 1.2 при условиях 

Разностно-фазовый портрет процесса Д-преобразования на основе рассмотренных в данном разделе алгоритмов сходен с приведенными в предыдущем разделе.

## 1.6. Троичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе вторых разностей

Алгоритм троичного Д-преобразования с демодуляцией на основе вторых разностей:

– модуляция









если  то  (1.10)

иначе 

– демодуляция

В установившемся процессе при отсутствии постоянно действующих внешних возмущающих воздействий и () максимальная ошибка не превышает 0,625.

В табл. 1.3 приведен пример преобразования с помощью алгоритма (1.10) и при наихудших внутренних возмущающих воздействиях. При построении примера приняты такие же, как и для табл. 1.1 (алгоритм (1.7)) исходные данные. Обратим внимание, в частности, на то, что изменение значения знаковой функции  где   значение в рассматриваемом примере (табл. 1.3), приводит к формированию на соответствующих шагах 

Таблица 1.3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 24,5 | 0 | >0 | >0 | 1 |  |
| 1 | 23,5 | 1 | 23 | 23 | 1 |  |
| 2 | 21,5 | 2 | 16 | 19 | 1 |  |
| 3 | 18,5 | 3 | 9 | 13 | 1 |  |
| 4 | 14,5 | 4 | 0 | 5 | 1 | +1 |
| 5 | 9,5 | 5 | 11 | -5 | +1 |  |
| 6 | 5,5 | 4 | 9 | -4 | +1 |  |
| 7 | 2,5 | 3 | 7 | -3 | +1 |  |
| 8 | 0,5 | 2 | 5 | -2 | +1 |  |
| 9 | 0,5 | 1 | 3 | -1 | +1 |  |
| 10 | 0,5 | 0 | 1 | 0 | +1 | -1 |
| 11 | 0,5 | 1 | 3 | 1 | -1 |  |
| 12 | 0,5 | 0 | 1 | 0 | -1 | +1 |
| 13 | 0,5 | 1 | 3 | 1 | +1 |  |
| 14 | см. |  |  |  |  |  |
| 15 | см. | и т.д. |  |  |  |  |

На рис. 1.9 представлен разностно-фазовый портрет процесса Д-преобразования, построенный на основе рассмотренного в данном разделе алгоритма. Пунктирной линией обозначены точки, где значения переключающих функций  и  равны нулю. Пунктирной замкнутой линией в начале координат выделена область, ограничивающая значение ошибки в установившемся процессе. Непрерывные сплошные линии – фазовые траектории, причём точками на этих линиях выделены значения координат  и , соответствующие используемым разностным соотношениям в дискретные моменты времени. Кружочками выделены точки траекторий, на которых происходит переключение знака (или изменение величины модуля) кванта преобразования . В области выше линии , между  и  и ниже  .

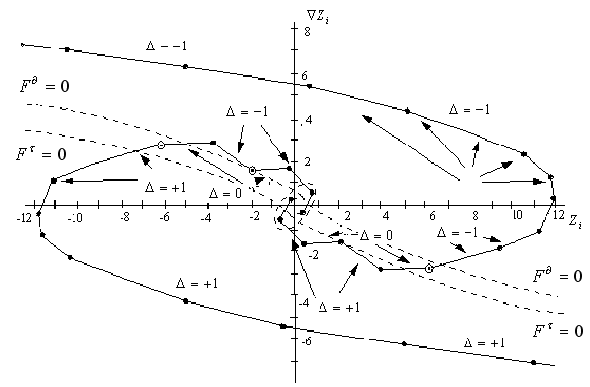


Рис. 1.9. Разностно-фазовый портрет троичного дельта-преобразования

## 1.7. Троичный алгоритм оптимального по быстродействию и точности Д-преобразования с демодуляцией на основе двойного интегрирования

Алгоритм троичного Д-преобразования с демодуляцией на основе двойного интегрирования:

– модуляция



если , то , иначе ; (1.11)

– демодуляция



(двойное интегрирование  на ()-м шаге

эквивалентно соотношению

 ).

Здесь . В установившемся процессе при отсутствии постоянно действующих внешних возмущающих воздействий  и () максимальная ошибка не превышает .

Пример преобразования с помощью алгоритма (1.11) приведен в таблице 1.4. При построении примера приняты такие же, как и для табл. 1.2 (алгоритм (1.8)) исходные данные. Изменения значения знаковой функции  приводит в табл. 1.4 к формированию на соответствующих шагах .

Таблица 1.4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | или |  |  |  |  |
| 1 | 24,5 | 0 | >0 | >0 | 1 |  |
| 2 | 24 | 1 | 21 | 23 | 1 |  |
| 3 | 22,5 | 2 | 16 | 19 | 1 |  |
| 4 | 20 | 3 | 9 | 13 | 1 |  |
| 5 | 16,5 | 4 | 0 | 5 | +1 | +1 |
| 6 | 12 | 5 | 11 | 5 | +1 |  |
| 7 | 7,5 | 4 | 9 | 4 | +1 |  |
| 8 | 4 | 3 | 7 | 3 | +1 |  |
| 9 | 1,5 | 2 | 5 | 2 | +1 |  |
| 10 | 0 | 1 | 3 | 1 | +1 |  |
| 11 | 0,5 | 0 | 1 | 0 | +1 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 3 | 1 | 1 |  |
| 13 | 0,5 | 0 | 1 | 0 | 1 | +1 |
| 14 | 0 | 1 | 3 | 1 | +1 |  |
| 15 | см. |  |  |  |  |  |
| 16 | см. | и т.д. |  |  |  |  |

Алгоритм (1.11) построен с использованием производной ошибки . Однако более удобным может быть использование не производной, а приращения ошибки. Для этого случая, осуществляя в алгоритме (1.11) как и для (1.9) замену переменных, получаем алгоритм троичного Д-преобразования с приращениями ошибки и демодуляцией на основе двойного интегрирования:

– модуляция



если , то , иначе ;

– демодуляция (1.12)



(двойное интегрирование  на ()-м шаге

эквивалентно соотношению



).

В установившемся процессе при отсутствии внешних возмущений максимальная ошибка для  также не превышает . Работа алгоритма (1.12) иллюстрируется на примере, рассмотренном для алгоритма (1.11) и приведенном в табл. 1.4. Знак  равен +1 или 1. Тогда на -м шаге знак кванта преобразования или совпадает со знаком , или .

Разностно-фазовый портрет процесса Д-преобразования на основе рассмотренных в данном разделе алгоритмов аналогичен приведенному в предыдущем разделе.

## 1.8. Оценка длительности переходного процесса при отсутствии внешних воздействий

При построении алгоритмов Д-преобразования одновременно решается вопрос оптимизации по быстродействию.

При отсутствии внешних возмущений длительность переходного процесса (количество шагов  и значение протяженности по *t* ) отработки ступени  ошибки оценивается с использованием выражения [16]:

  (1.13)

Для алгоритмов с двойным интегрированием имеем :

 (1.14)

Данное выражение с точностью до  соответствует известной оценке переходного процесса непрерывного оптимального по быстродействию преобразования (управления) с двойным интегрированием [26]. Контрольные примеры разд. 1.41.7 подтверждают достоверность (1.13), (1.14).

## 1.9. Обобщенные оценки ошибки установившегося процесса Д-преобразований при наихудших воздействиях

Оценки максимальной ошибки установившегося процесса для алгоритмов Д-преобразования при наихудших внутренних и внешних возмущающих воздействиях могут быть сформулированы в следующем обобщенном виде [16]:

1. Обобщенная оценка максимальной ошибки установившегося процесса

() Д-преобразования с демодуляцией на основе вторых разностей

():

 (1.15а)

В данных формулах и при оценке, соответственно, двоичного и троичного преобразований.

2. Обобщенная оценка максимальной ошибки установившегося процесса  Д-преобразования с демодуляцией на основе двойного интегрирования :

(1.15б)

Значение и при оценке, соответственно, двоичного и троичного преобразований. Формулы (1.15) содержат, в частности, предельные условия существования дельта-преобразований.

Возможные варианты использования приведенных оценок ошибки для различных алгоритмов Д-преобразования:

– двоичное с демодуляцией на основе вторых разностей ;

– двоичное с демодуляцией на основе вторых производных и с использованием  ;

– двоичное с демодуляцией на основе вторых производных и с использованием  ;

– троичное с демодуляцией на основе вторых разностей ;

– троичное с демодуляцией на основе вторых производных и с использованием  ;

– троичное с демодуляцией на основе вторых производных и с использованием  .

## 1.10. Оптимизация установившегося процесса при наихудших внешних возмущающих воздействиях

Сущность оптимизации установившегося процесса (также разд. 1.3) при наличии наихудших внешних возмущений состоит в выборе таких соотношений между  и  для алгоритма Д-преобразования, при которых в условиях наихудших внутренних и внешних возмущающих воздействий минимизирован максимальный уровень ошибки. Будем искать приближенное (квазиоптимальное) решение поставленной задачи, которое базируется на графоаналитическом методе. Ниже рассматриваются вопросы, касающиеся Д-преобразований со вторыми разностями. Однако при использовании данной методики формулируются аналогичные выводы и для Д-преобразований с двойным интегрированием.

На рис. 1.10 и 1.11 приведены характеристики нормированной по  максимальной ошибки (нормированной ошибки  в зависимости от  соответственно для двоичного и троичного Д-преобразований. Сплошными линиями показаны участки характеристик, соответствующие  (использование формул (1.15)), а пунктиром  . Как видно из рассмотрения данных характеристик, изменение величины  в довольно широких пределах слабо влияет на изменение относительной ошибки.

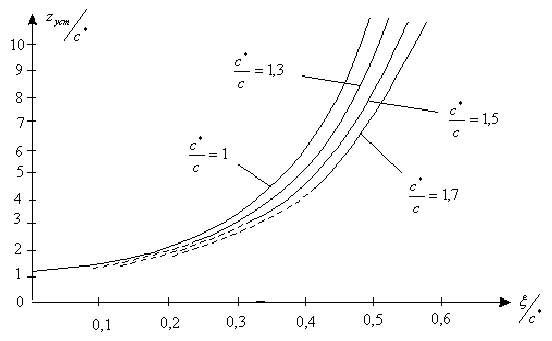
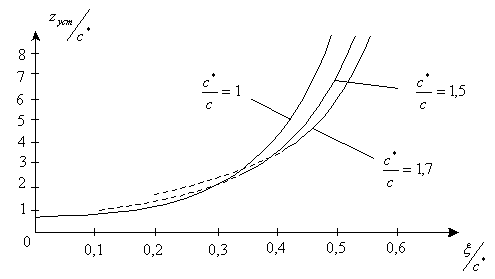


Рис. 1.10. График зависимости  двоичного Д-преобразования

Рис. 1.11. График зависимости  троичного Д-преобразования

Пусть минимальный уровень максимальной ошибки при данном  определяется соотношением

.

Запишем последнее в следующем эквивалентном виде:

, (1.16)

где   нормированная по  ошибка Д-преобразования (максимальная ошибка Д-преобразования, приходящаяся на единицу внешнего возмущающего воздействия ). Как видно из (1.16), для обеспечения при данном  минимального уровня максимальной ошибки достаточно, чтобы достигало минимального уровня отношение 

На рис. 1.12 и 1.13 представлены зависимости  от  при разных , полученные соответственно для двоичного и троичного Д-преобразований. На графиках достаточно четко выражены минимумы, размещение которых слабо зависит от соотношения . На основе рассмотрения данных графиков определяется первое приближенное условие оптимизации процесса Д-преобразования, соответствующее области расположения минимума на рис. 1.12 и 1.13:

 (1.17)



Рис. 1.12. График зависимости  двоичного Д-преобразования



Рис. 1.13. График зависимости  троичного Д-преобразования

Соотношение  (второе условие оптимизации) будет определено в разделе 1.11 при рассмотрении переходных процессов.

## 1.11. Оценки длительностей переходных процессов. Условия оптимизации переходного процесса

Аналитическое исследование переходных процессов Д-преобразования, как и установившихся, включает три основных этапа:

а) выявление наихудших воздействий, приводящих к переходному процессу с наибольшей длительностью (с учетом возможных перерегулирований);

б) разработка оценок, характеризующих максимальную длительность переходных процессов;

в) решение вопросов оптимизации и выбора параметров алгоритма Д-преобразования.

В основе анализа длительностей переходных процессов, как это часто принимается в теории автоматического управления, рассматривается действие ступеньчатого изменения преобразуемой функции. В процессе выполнения переходного процесса постоянно действуют ограниченные по модулю возмущающие воздействия . Переходный процесс считается завершенным, если максимальное значение ошибки Д-преобразования достигает (не превосходит) величины , где   максимальное значение ошибки установившегося процесса при постоянно действующих внутренних и внешних наихудших воздействиях (разд. 1.9).

Оценка длительности переходных процессов при отсутствии внешних возмущений приведена в разд. 1.8.

Приближенные оценки длительностей переходных процессов при действии наихудших внешних воздействиях приводятся ниже для (**, ** ступенчатое изменение ошибки в начальный момент времени) [16]:

а) оценка с “избытком”

 (1.18)

б) оценка с “недостатком”

 (1.19)

На рис. 1.14 представлены характеристики, иллюстрирующие максимальные длительности переходного процесса в зависимости от  Принято . Сплошными линиями показаны характеристики, полученные для оценок с “избытком”, пунктирными – с “недостатком”. Как видно из рассмотрения приведенных характеристик, а также в соответствии с оценками (1.18), (1.19), минимальный уровень максимальной длительности переходного процесса обеспечивается при выполнении соотношения

 (1.20)

которое следует из предельного соотношения в (1.18), (1.19)

.



Рис. 1.14. Графики зависимости максимальной длительности переходного процесса от  при 

При выполнении данного условия длительность переходного процесса при рассматриваемых наихудших воздействиях минимизирована (близка к оптимальной). Важно заметить, что условие (1.20) практически не зависит от точности получаемых оценок (1.18), (1.19). Окончательный выбор значений  и  при данном  в условиях оптимизации процессов должен осуществляться с учетом установившегося процесса (подразд. 1.10).

В частности, для  при , как следует из (1.18), (1.19), получаем при шаге  приближенную оценку отработки ступени ошибки

 (1.21)

где   начальное значение ошибки,   количество шагов,   длительность переходного процесса. Данные оценки практически совпадают с (1.13), (1.14).

## 

## 1.12. Оптимизация установившихся и переходных процессов Д-преобразований второго порядка при наихудших внешних возмущающих воздействиях

В подразд 1.10, 1.11 получены условия (1.17), (1.20), определяющие возможности минимизации максимальных уровней длительности переходного и ошибки установившегося процессов при наихудших воздействиях. Совместное рассмотрение данных условий позволяет сформулировать решение задачи оптимизации:



Таким образом, при данном , характеризующем максимальное значение модуля внешних постоянно действующих наихудших возмущающих воздействий, приближенное условие обеспечения оптимального (квазиоптимального) процесса Д-преобразования второго порядка можно представить в виде

 (1.22)

## 1.13. Адаптивная оптимизация по точности Д-преобразований второго порядка при произвольных по характеру изменения неконтролируемых внешних воздействиях

Рассмотрим построение алгоритмов, представляющих возможность адаптивной оптимизации по точности при произвольных по характеру изменения априорно неопределенных постоянно действующих на протяженных интервалах ограниченных внешних возмущениях, т.е. когда априорно не определены не только интенсивность, но и характер внешних воздействий [14, 16, 19]. Данные алгоритмы представляют особый интерес для использования при рассмотрении прикладных задач, в которых отсчеты преобразуемой функции (входного сигнала) могут быть оценены (измерены) только для текущего и, соответственно, предшествующих моментов времени, как это имеет место, например, в системах автоматического управления. Данное ограничение основывается на исходных принципах, заложенных при построении теории в предшествующих разделах. При возможности обработки текущего отсчета сигнала с задержкой, по крайней мере на некоторое количество шагов, целесообразно использовать алгоритмы преобразований, рассмотренные в гл. 4.

Акцентируем внимание на следующих, уже в основном рассмотренных ранее аспектах, характерных для процессов преобразования при наихудших воздействиях:

1) изменение ошибки установившегося процесса имеет колебательный характер;

2) установившийся колебательный процесс является частным случаем реализации переходных процессов; максимальные значения амплитуды этих колебаний определяются на основе оценок (1.15);

3) полупериод колебания, а соответственно и теоретическое представление функции ошибки на более протяженных интервалах может быть с достаточно высокой точностью (57 %) аппроксимировано гармоническим колебанием;

4) одновременная оптимизация по быстродействию и точности при данном  обеспечивается условиями (1.22).

Вводим для -го шага установившегося процесса Д-преобразования оценку среднего теоретического значения ошибки при наихудших воздействиях.

 (1.23)

Здесь   непрерывная функция, принимающая в точках = 0,1,2,..., значения ошибки Д-преобразования,   среднее значение модуля теоретической ошибки преобразования на интервале 

Используем возможность аппроксимации ошибки гармоническим колебанием и для приближенной оценки запишем

 (1.24)

где   параметр, согласующий начальную фазу гармонического сигнала и траектории ошибки ;   период изменения ошибки. При выполнении условий оптимизации (1.22) для двоичных и троичных алгоритмов теоретическое значение длины  периода приближенно соответствует отношению:

 (1.25)

где   количество шагов полупериода.

Если , (1.26)

где   целое положительное число, характеризующее количество полупериодов на  то на основе (1.24) следует приближенная оценка

. (1.27)

Если же значение  имеет дробную часть, то, по крайней мере, с целью уменьшения влияния начальной фазы (на  полупериод укладывается не целое число раз), необходимо, очевидно, брать  и тогда, учитывая (1.25), (1.26), должно быть

 (1.28)

В дальнейшем предполагаем, что условие (1.28) выполняется, и используем формулу (1.27) в относительных единицах:

 (1.29)

Для оптимизированного по быстродействию и точности процесса Д-преобразования при наихудших воздействиях с учетом (1.22), (1.29) при значениях = 0,25 и на основе (1.15) вводим:

 (1.30а)

 (1.30б)

где  и   оптимизированные значения соответственно для двоичного и троичного алгоритмов. И тогда на основе (1.29) и (1.30) получаем для среднего теоретического оптимального относительного значения ошибки ():

 (1.31а)

 (1.31б)

Далее используем обозначение  относительной ошибки, . В табл. (1.5) приведены рассчитанные значения *H* для различных алгоритмов Д-преобразования. Таким образом, для каждого из алгоритмов Д-преобразований и выбранных соотношений между  и  численно определена теоретическая оценка .

Таблица 1.5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Алгоритм | |  |
| Двоичный | с  (1.9) | 1,53 |
| с  (1.10) | 1,411,4 |
| с  (1.11) | 1,911,9 |
| Троичный | с  (1.12) | 1,091,1 |
| с  (1.13) | 0,991 |
| с  (1.14) | 1,381,4 |

Выше рассмотрены теоретические предпосылки решения поставленной задачи. Свяжем эти предпосылки с реальным процессом.

Пусть реальный процесс Д-преобразования протекает на основе двоичного или троичного алгоритмов, выполняется условие (1.30) и . Для интервала  вводим измерительную оценку среднего значения ошибки :

 (1.32)

Тогда всякому реальному процессу Д-преобразования, протекающему при данных и , произвольных по характеру изменения возмущающих воздействиях и характеризующемуся на  значением , ставим в соответствие эквивалентный по среднему значению ошибки теоретический оптимизированный процесс Д-преобразования при наихудших воздействиях, параметры которого выше численно определены согласно (1.31). Если при этом , то в среднем в реальном процессе при данном  преобладает влияние на ошибку возмущающих воздействий, т.е.  и значение  целесообразно увеличить. Если , то имеет место преобладание значения  и эту величину целесообразно уменьшить. Последние заключения и составляют основу предлагаемого принципа адаптации. Теперь алгоритм Д-преобразования для -го шага можно дополнить следующими формулами, реализующими возможности одного из вариантов адаптации на *i*-м шаге (начальные значения *i*=0, η=1, *s*=1):

 (1.33)

где   положительно определенная функция, ограниченная малым по сравнению с единицей значением, , причем можно принять . Сущность алгоритма (1.33) состоит в выполнении через каждые, по крайней мере,  шагов коррекции значения , которое остается постоянным до новой коррекции.

В простейшем случае можно выбрать . Определенным недостатком в этом случае является то, что отсутствует оперативное управление скоростью адаптации. Поэтому в более общем случае значения  могут быть оценены с учетом ряда факторов, которые в той или иной мере могут повлиять на выбор скорости адаптации, например частота изменения знака , величина и скорость изменения , текущее значение ,  и некоторые другие. Один из вариантов решения задачи управления скоростью адаптации приведен в [124].

Существенно заметить, что для теоретической средней ошибки  на  при достаточно большом значении  эквивалентное среднее значение  соответствует действию произвольных по характеру изменения в общем случае не связанных с жесткими ограничениями внешних возмущений вида  . В данном случае ограничения для интенсивностей внешних возмущений обуславливаются возможностями обеспечения в процессе работы с адаптацией достаточно малых или, по крайней мере, с практической точки зрения допустимых измеряемых значений . Фактически при данном  интенсивность внешних возмущений  на интервале  косвенно оценивается значением .

Вопросы апробации адаптивных алгоритмов освещаются в гл. 2.

В данной работе используется единый алгоритм, обеспечивающий оптимизацию переходных и установившихся процессов, благодаря чему отсутствует необходимость разделения этих процессов: любой реальный процесс может рассматриваться как переходный с минимизацией максимальных значений модуля колебаний ошибки при данном . Сущность адаптации и состоит в выборе такого  для , чтобы при данных (в среднем медленно изменяющихся по интенсивности) воздействиях реальный процесс по среднему значению ошибки был эквивалентен теоретическому оптимизированному установившемуся процессу, рассматриваемому при наихудших воздействиях. Локальные реальные переходные процессы, при которых ошибка превосходит , отражаются в теоретической оценке “в среднем”, т.е. при выполнении условий оптимизации “в среднем переходные процессы отсутствуют”, а следовательно, “в среднем” могут отсутствовать и соответствующие для оптимизации переходного процесса требования к величине кванта преобразования. В то же время гибкое изменение значения в зависимости от текущего среднего значения ошибки обеспечивает “в среднем” высокую скорость протекания реальных переходных процессов, соответствующую оптимизированным по быстродействию при данных  и .

**Контрольные вопросы**

1. Алгоритмическая сущность дельта-преобразований и исторические предпосылки использования дельта-преобразований первого порядка в 6070-е гг.

2. Достоиства и недостатки дельта-преобразований первого порядка.

3. Что такое перегрузка по крутизне и возможности изменения перегрузки при использовании дельта-преобразований первого порядка?

4. Сущность двоичного и троичного дельта-преобразований?

5. Какой характер имеет аппроксимирующая функция при отработке ступени входного сигнала на основе дельта-преобразований первого порядка?

6. Нарисуйте диаграммы движения управляемого автомобиля с выходом за минимальное время на заданную линию направления движения.

7. Почему дельта-преобразования второго порядка представляют интерес с точки зрения преодоления недостатков дельта-преобразований первого порядка?

8. В чем состоят проблемы известных методов алгоритмизации дельта-преобразований второго порядка?

9. В чем состоит постановка задачи Д-преобразования второго порядка?

10. Запишите исходные разностные и дифференциально-разностные уравнения дельта-преобразований второго порядка.

11. Что понимается под "внешними возмущениями"?

11. В чем состоят принципы оптимизации процессов дельта-преобразований второго порядка? Сущность минимаксного критерия оптимальности.

12. Какие алгоритмические виды Д-преобразований второго порядка существуют?

13. Почему рассматриваемые алгоритмы Д-преобразований второго порядка называются оптимизированными?

14. В чем алгоритмическая сущность процессов модуляции и демодуляции?

15. В чем состоят достоинства алгоритмов Д-преобразований второго порядка?

16. В чем состоит сущность оптимальности алгоритмических процессов Д-преобразований второго порядка по быстродействию и точности?

17. Нарисуйте фазовый портрет Д-преобразования второго порядка при отсутствии внешних возмущений.

18. Нарисуйте диаграмму формирования аппроксимирующей функции для преобразуемой функции в виде прямой линии.

19. Почему представляет особый интерес для решения задачи синтеза алгоритмов цифрового управления двоичный дифференциально-разностный алгоритм Д-преобразования второго порядка без измерения производных?

20. Чему равна длительность переходного процесса и ошибка преобразования в установившемся процессе для троичного алгоритма Д-преобразования при отсутствии внешних возмущений?

21. Какой из алгоритмов обеспечивает наименьшую гарантированную ошибку в установившемся процессе?

22. Сформулируйте условия оптимизации установившихся и переходных процессов Д-преобразования второго порядка при ограниченных внешних возмущениях?

23. В чем состоит сущность реализации адаптивных Д-преобразований второго порядка при неконтролируемых внешних воздействиях? Какой параметр алгоритма подвергается управляемому изменению в процессе адаптации?

24. Каков характер поведения признака *fs* в алгоритме адаптации при оптимизированном относительно неконтролируемых внешних возмущений состоянии процесса Д-преобразования второго порядка?

25. В чем проявляется алгоритмическое единство оптимизированного выполнения переходных и установившихся процессов Д-преобразования второго порядка?

# Глава 2

# СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## 2.1. Дельта-преобразования второго порядка и оптимизация цифрового управления

Проблемы оптимизации и, в частности, многокритериальной оптимизации процессов управления всегда привлекали внимание исследователей. Для нелинейных систем разработаны оригинальные подходы, позволяющие одновременно обеспечить устойчивость, грубость, оптимизацию по быстродействию, энергозатратам, учесть ограничения на управляющие воздействия, что освещено, например, в [5, 33, 36].

В то же время практически не освещены для цифровых систем управления возможности оптимизации, сочетающие указанные выше особенности и характеризующиеся функционированием при дискретных отсчетах времени с адаптацией по точности к произвольным (априорно неопределенным) возмущающим воздействиям, единством методологии синтеза алгоритмов управления с оптимизацией по точности и быстродействию для линейных и нелинейных объектов со стационарными или нестационарными параметрами, с представлением уравнений движения в исходном виде или в виде отклонений ошибок, а также некоторые другие.

Математическое решение задачи, охватывающей перечисленные выше требования и проблемы, в общем случае пока неразрешимо. Поэтому представляют интерес методы, позволяющие расширить круг разрешаемых или ослабляемых проблем, сформировать новую, представляющую практический интерес совокупность одновременно оптимизируемых показателей качества и реализуемых возможностей.

В данной главе рассматривается новая методология синтеза алгоритмов цифрового управления, базирующаяся на теории оптимизированных дельта-преобразований второго порядка [13, 14, 15, 16]. Особенностью данной методологии является комплексное решение многих важных в теории и практике цифрового автоматического управления вопросов. В частности, на основе единой инженерной методики синтеза для линейных и нелинейных объектов представляются возможности:

– обеспечения быстродействия (при ограничениях, определяемых текущими значениями параметров алгоритма дельта-преобразования *c\** и ), соответствующего оптимальному быстродействию эквивалентной системы с объектом, модель которого включает два последовательно включенных интегрирующих звена;

– реализации оптимизированного по быстродействию и точности управления на основе единого алгоритма;

– обеспечения гарантированных показателей качества (точности, длительности переходных процессов) на конечных интервалах при отсутствии или слабом проявлении внешних возмущающих воздействий;

– оптимизации по точности с адаптацией к произвольным по характеру изменения априорно неопределенным (ограниченным) возмущающим воздействиям, квазиоптимального соотношения между точностью, быстродействием и внешними возмущающими воздействиями;

– управления объектом, уравнения движения которого содержат ограниченные нестационарные параметры;

– проведение синтеза алгоритмов управления не только на основе уравнений движения в отклонениях, но и исходных (реальных) уравнений движения; данная возможность представляет особый интерес, когда переход к отклонениям для нелинейных уравнений связан с нежелательным усложнением правых частей, в частности, в случае постоянно изменяющихся задающих воздействий;

– использование для управления измеряемой ошибки (без производных ошибки) или ошибки с измерением производной;

– оперирование с постоянно изменяющимися задающими воздействиями;

– организации робастного цифрового управления для некоторых нестационарных объектов с параметрической и частичной структурной неопределенностями;

– обеспечение при необходимости предельно большого шага дискретизации при заданных точности и быстродействии, что способствует, например, снижению нагрузки на ЭВМ по решению задачи управления и освобождению ее для других задач, уменьшению износа механических исполнительных устройств за счет снижения предельной частоты переключения, а также позволяет снизить требования к точности представления уравнений движения (например, упростить их за счет исключения составляющих с большой по сравнению с шагом дискретизации постоянной времени);

– простоты синтеза, расчета параметров и представления самих алгоритмов управления;

– использование для широкого круга объектов и некоторые другие.

Успешное решение поставленной задачи на основе оптимизированных Д-преобразований второго порядка оказалось возможным благодаря тому, что на основе разработанной теории получены алгоритмы, обеспечивающие при определенных условиях для любого представляющего практический интерес шага дискретизации  гарантированную минимизированную по значению ошибку установившегося процесса при наиболее коротком переходном процессе. Это позволило преодолеть проблему колебательности, неустойчивости, характерную для известных прототипных цифровых алгоритмов (см. глава 1). Кроме того, разработанная теория адаптации по точности к неконтролируемым внешним воздействиям позволила эффективно решать многие сложные вопросы и при синтезе алгоритмов управления.

Сущность синтеза алгоритмов цифрового управления на основе оптимизированных дельта-преобразований второго порядка состоит в приведении уравнений движения к базовой форме (системе уравнений второго порядка), последующего "шаблонного" преобразования этих уравнений к исходным уравнениям дельта-преобразований и формирования в результате выражений для управляющих воздействий, включающих значения квантов преобразования. При выполнении определенных алгоритмических условий обеспечивается процесс управления с движением по траекториям эквивалентных дельта-преобразований второго порядка, для которых определены алгоритмы, функциональные возможности и качественные характеристики.

Рассматриваемая методология может представлять особый интерес для использования при проектировании систем управления механическими объектами, в основе физической сущности функционирования которых заложен закон Ньютона, устанавливающий связь между второй производной координаты состояния, действующими силами и массой объекта.

Возможности обеспечения гарантированных показателей качества и предельно достижимых запасов по устойчивости, характерных для оптимальных по быстродействию систем управления, могут быть положены в основу решения возникающих проблем в экстремальных ситуациях, например, для летательных аппаратов.

В данной работе практически не затрагиваются вопросы, связанные с энергозатратами. В то же время возможность оперативного изменения величины кванта модуляции в процессе управления представляет основу для управления потребляемой энергией, решения вопросов ее минимизации, например, по каналу управляющего воздействия. В частности, адаптивный алгоритм, нацеленный на минимизацию средней ошибки путем варьирования значением кванта преобразования, в определенной мере позволяет решать и задачу с минимизацией затрачиваемой энергии. С другой стороны, предлагаемая методология, например, для систем со структурной неопределенностью базируется на использовании, как правило, достаточно больших управляющих воздействий, что, вероятно, может потребовать и значительных энергетических затрат.

Возможности оперативного изменения параметров квантов преобразования ( и ∇*t*) представляют также основу для развития логических (интеллектуальных) методов формирования определенных качественных характеристик в процессе управления (обеспечение требуемых текущих быстродействия, точности; управление помехоустойчивостью системы; повышение скорости адаптации к неконтролируемым возмущениям и т.п.).

На рис. 2.1 приведена в простейшем виде структура системы цифрового автоматического управления. Состояние объекта управления характеризуется выходной величиной (вектором) *X*, которая формируется с помощью датчиков, преобразователей значений в цифровой код (измерительных устройств) и поступает в цифровое управляющие устройство (регулятор). На входы регулятора также поступают задающие воздействия *Yзад*, содержащие информацию о требуемых значениях *X*, т.е. цели управления, и нестационарные параметры *P****.*** В цифровом управляющем устройстве формируются по определенному заложенному в нем алгоритму управляющие воздействия *U****,*** поступающие для непосредственного управления на вспомогательные устройства объекта. К системе приложены возмущающие воздействия *G*, которые изменяют состояние объекта *X*, препятствуя управлению.

Цифровое управляющее устройство

Исполни­тельные устрой­ства

Объект управления

Измери­тельные устройства

# P

# Узад

# U

# G

# X

Рис. 2.1. Система цифрового автоматического управления

## 2.2. Теоретические положения синтеза алгоритмов цифрового управления на основе оптимизированных Д-преобразований второго порядка

Методология синтеза алгоритмов цифрового управления с использованием дельта-преобразований второго порядка может реализовываться как для непрерывных (имеющих постоянную непрерывную зависимость координат состояния от времени *t*, независимо от наличия шага дискретизациипроцессов управления), так и для дискретных объектов (переходящих через интервал времени  "мгновенно" в новое состояние). При этом целесообразно использовать алгоритмы дельта-преобразований, обеспечивающие наиболее высокую точность: для непрерывных объектов  троичный дифференциально-разностный (1.11) или (1.12), для дискретных – троичный разностный (1.10). В рамках использования указанных алгоритмов преобразований собственно алгоритмы демодуляции не используются: функции демодуляции выполняет сам объект управления.

Учитывая, что наибольшую перспективность практического использования рассматриваемая методология представляет для механических объектов, ниже приводится освещение синтеза алгоритмов управления для непрерывных объектов с описаниями в виде систем дифференциальных уравнений [14, 16].

Будем рассматривать объекты управления, исходные (реальные) уравнения движения которых описывают управляемый процесс (по крайней мере, для ограниченных областей изменения управляющих воздействий и координат состояния) и могут быть приведены для *i*-го шага к следующему виду:

 (2.1)

где  – значения *j*-й координаты объекта и ее производных в момент времени *t* на *i*-м шаге;  − множества конечной размерности известных стационарных или в общем случае нестационарных параметров; *Uki*(*t*) – управляющие воздействия;    – начальные значения координат состояния.

Вводим в рассмотрение задающие воздействия *yзад.ji*(*t*) и оцениваем ошибку управления:



где  − значения *j*-й координаты ошибки. Тогда соответственно   производные ошибки.

Учитывая теперь, что



систему (2.1) представляем в виде



Вводим неконтролируемые (неизмеряемые) возмущающие воздействия :

 (2.2)

Обозначим в (2.2)

 (2.3)

Теперь система (2.2) принимает вид

, (2.4)

где сумма  может рассматриваться как внешние возмущения. При  на интервале *t*∈[*ti-1*; *ti*] система (2.4) по уравнениям  совпадает с формой представления исходного дифференциального уравнения дельта-преобразований второго порядка (1.5б), для которого определены двоичные и троичные алгоритмы оптимизированных по быстродействию и точности преобразований, качественные оценки, возможности работы без адаптации и с адаптацией к произвольным неконтролируемым внешним возмущениям и некоторые другие теоретические и рекомендуемые для практического использования результаты.

Вычисление кванта преобразования  для будущего (*i*+1)-шага выполняется с использованием оцененных (измеренных) на *i*-м шаге значений ошибок или значений ошибок и их производных.

Троичный алгоритм оптимизированного по быстродействию и точности Д‑преобразования, который в записи без измерения (с вычислением) производной ошибки (1.9) и с привязкой к используемым обозначениям индексов в системе дифференциальных уравнений движения (2.1) для *i*-го шага имеет вид:

 (2.5)

Троичный алгоритм оптимизированного по быстродействию и точности Д‑преобразования, который в записи с измерением производной ошибки (1.8) и с привязкой к используемым обозначениям индексов в системе дифференциальных уравнений движения (2.1) имеет вид:

 (2.6)

В приведенных выше алгоритмах  − постоянная на интервале *t*∈[*ti*; *ti*+1] величина (квант преобразования), ;  − параметр, который может быть выбран с учетом требуемой точности в установившемся процессе и быстродействия или формируется в процессе адаптации;  − временной интервал дискретизации, выбираемый с учетом, в частности, требуемого быстродействия (1.14), (1.21).

Следующий этап решения данной задачи синтеза связан с определением для предстоящего (*i*+1)-го шага управляющих воздействий *Uj*,*i*+1(*t*), *t*∈[*ti*; *ti*+1] на основе (2.3).

Введем запись (2.3) для прогнозируемого (*i*+1)-го шага и определяем (в общем случае в неявном виде)

(2.7)

где в правую часть уравнений входят .

При численно определенных , координатах состояния и параметрах  считаем, что для рассматриваемых управляемых процессов (2.1), по крайней мере, в ограниченных областях (областях управляемости) существует решение системы уравнений (2.7) относительно , , *t*∈[*ti*; *ti+*1], *i*=0, 1, 2,... .

Определение значений координат *xk*,*i*+1(*t*) и их производных для правой части (2.7) может выполняться на основе двух способов:

а) выполнение измерений указанных переменных с использованием датчиков;

б) с использованием прогнозирования.

Построение алгоритмов прогноза базируется на особенностях решения задачи синтеза, состоящей в обеспечении движения объекта управления по траекториям дельта-преобразований второго порядка. Для идеального случая (отсутствие возмущений, *Gj*(*t*)=0, , по крайней мере, на *t*∈[*t*i-1; *ti+*1]) описание этого движения соответствует совместному решению систем

  *t*∈[*ti-*1; *ti*];

 *t*∈[*ti*; *ti+*1],

запись которых следует из (2.1), (2.3). В результате двойного интегрирования имеем

 (2.8)

где *xki* и *xk*,i-1 − измеряемые координаты. По существу (2.8) представляет точные соотношения прогнозирования координат состояния для момента времени *t* (*i+*1)-го шага. При наличии упомянутых выше возмущений соотношения (2.8) являются приближенными.

Обращаем внимание на то, что согласно теории дельта-преобразований второго порядка должно быть обеспечено  на  при изменяющихся в функции от времени *t* управляющих воздействиях и координатах состояния.

Для реального обеспечения теоретического значения  на (*i*+1)‑м шаге необходимо определять такие *Uj*,*i*+1(*t*) при данном  в каждый момент времени *t*∈[*ti*; *ti*+1], чтобы выполнялось указанное условие; практически для цифрового управления нужно говорить о разбиении при необходимости шага ∇*t*, т.е. [*ti*; *ti*+1] на такое количество *r* более мелких шагов ∇*τ* (∇*t*=*r*⋅∇*τ*; *ti*+1,*σ*= *ti*+∇*τ⋅σ*; *σ*=0,1,2,...,(*r-*1) или *σ*=1,2,...,*r*), при котором на достаточном уровне "примерно" поддерживается постоянство . Влияние возможных реальных остаточных отклонений , *t*∈[*ti*; *ti*+1] от требуемого постоянного значения можно рассматривать как дополнительные, приведенные к внешним неконтролируемым возмущающим воздействиям в (2.4) и соответственно в (2.2). Влияние данных неконтролируемых возмущений при ухудшении управляемости усиливается вплоть до проявления недопустимых воздействий (см. в разд. 1.9. ограничения при наихудших воздействиях).

Для определения значений координат *xk*,*i*+1(*t*) и их производных для правой части (2.7) теперь могут использоваться два способа с учетом указанной выше дополнительной дискретизации:

а) выполнение измерений указанных переменных на каждом шаге с использованием датчиков, если имеются практические возможности выполнения измерений с учащением;

б) выполнение приближенного прогнозирования, базирующегося на основе (2.8) и имеющего вид

 (2.9)

Теперь для управляющих воздействий (2.8) можно записать:

 (2.10)

Для разрешаемых относительно *Uj*,*i*+1(*t*) (*Uj*,*i*+1,*σ*) уравнений могут применяться прямые методы; для неразрешаемых − методы решения систем уравнений в неявной форме.

Введение дополнительной дискретизации при использовании (2.9) не приводит к необходимости соответствующего учащения съема измерительной информации о текущих значениях координат состояния. Теоретическая оценка необходимости и мерности учащения затруднительна, поэтому решение данного вопроса реализуется при моделировании (имеет место тенденция зависимости достаточного уровня учащений в зависимости от количества базовых дифференциальных уравнений второго порядка; например, для описания объекта в виде одного дифференциального уравнения второго порядка, как правило, получение качественных оценок на уровне теоретических оказывается достаточным при *r*=1, т.е. при полном отсутствии учащений).

Для обеспечения достаточной точности прогноза и решения задачи управления в целом, по крайней мере, на отдельных протяженных временных участках установившегося процесса необходимо, чтобы на этих участках значение  было существенно больше значений величин  и возмущающих воздействий . При локальных (кратковременных) нарушениях этих условий будет иметь место переходный процесс. При работе со значительными интенсивностями внешних возмущений и использовании адаптации происходит автоматическое установление оптимизированного соотношения между возмущениями и средней ошибкой управления.

Для процессов дельта-преобразований, выполняемых с алгоритмической демодуляцией на основе описанных в гл. 1 алгоритмов, при отсутствии возмущений траектории фазового портрета описывают оптимальный по быстродействию процесс, для которого гарантируется не только ограниченность, но и минимальность длительности перехода из любой точки фазового пространства в априори определенную достаточно малую область в начале координат (длительность определяется, в частности, значением модуля кванта преобразования). При допустимых внешних воздействиях длительность переходных процессов также ограничена. Такие системы характеризуются устойчивостью по Ляпунову в целом.

В данном разделе рассмотрены, в частности, условия применения для синтеза алгоритмов управления дельта-преобразований второго порядка, при которых качественные оценки процесса управления по быстродействию и точности должны соответствовать качественным характеристикам процесса дельта-преобразования. При этом роль демодулятора выполняет собственно объект управления. Рассматриваемая существенно более сложная задача (2.2) связана с (2.4) через соотношения (2.3). В связи с реализацией этих соотношений, в которых должны при необходимости учитываться ограничения на управляющие воздействия, координаты состояния, существование решения относительно управляющего воздействия, может потребоваться анализ ограничений области фазового пространства, в которой процесс управления может быть реализован.

Математическое решение данной задачи с учетом всех ограничений для сложных уравнений движения может представлять собой существенную проблему. В этом случае при необходимости эффективным инструментом для выбора параметров  с учетом ограничений и определения области устойчивости системы управления в фазовом пространстве является моделирование на ЭВМ. Фактором, определяющим область фазового пространства с проявлением устойчивости, является наличие управляемости объекта в этой области.

Эффективным средством автоматической организации оптимизированного процесса управления является использование адаптивной оптимизации по точности при неконтролируемых внешних возмущениях.

В целом сущность рассмотренной методологии синтеза алгоритмов управления состоит в том, что формируется процесс управления, эквивалентный процессу оптимизированного Д-преобразования второго порядка. Интересной особенностью применения Д-преобразований для управления является, в частности, то, что для различных объектов имеют место фактически шаблонные характеристики для областей устойчивости, качественные оценки и рекомендации, которые могут быть априорно использованы при проектировании цифровой системы управления (реализация квазиоптимальных по быстродействию и точности режимов стабилизации и слежения на основе единых алгоритмов, оптимизированное по точности управление с адаптацией к неконтролируемым возмущениям, оптимизация при известных наихудших воздействиях и т.д.). При этом под оптимизацией по быстродействию понимается то максимально достижимое быстродействие, которое обеспечивается при ограничениях в виде текущих значений параметров алгоритма дельта-преобразования *c*\*,  и соответствует оптимальному быстродействию эквивалентной по данным ограничениям системы с объектом, модель которого включает два последовательно включенных интегрирующих звена.

В частности, при отсутствии (или слабом влиянии) внешних возмущений и постоянстве (или медленном изменении)  получаемые при моделировании систем управления качественные экспериментальные оценки существенно не отличаются от соответствующих теоретических значений гарантированных показателей дельта-преобразований:

 ошибка установившегося процесса (для троичного алгоритма):

 (2.11)

 количество шагов переходного процесса ():

 (2.12)

 длительность переходного процесса:

 (2.13)

## 2.3. Пример синтеза алгоритма цифрового управления для нелинейной модели

Воспользуемся уравнениями движения, приведенными в [6] (гидроакустическая антенна):



где *k*1=7,3; *k*2=0,31; *T*=0,079; *A*=24·10-4.

Преобразуем данную систему в дифференциальное уравнение второго порядка и введем обозначение *x*(*t*)=*ϕ*1(*t*):



Вводим задающее воздействие и переходим к уравнению с ошибкой управления



Пусть на объект постоянно действуют возмущающие воздействия, и тогда для *t*∈[*ti*; *ti*+1] можем записать

 (2.14)

где *Gi*+1(*t*) – приведенные неизмеряемые внешние возмущающие воздействия.

Обозначим

 (2.15)

и (2.14) с учетом возмущающих воздействий (задающих и внешних) принимает вид (2.4)

 (2.16)

Ордината ошибки *zi* является измеряемой; на основе (2.16) можно применить алгоритм Д-преобразования и определить  (в данном примере применяем троичный алгоритм (2.5) с вычислением производной ошибки).

Вводим на *t*∈[*ti*; *ti*+1] более мелкий шаг ∇*τ,* и на основе (2.10), (2.15) определяем



где в правой части координаты состояния определяются в соответствии с (2.9).

На рис. 2.2 представлен фазовый портрет системы управления при *yзад*(*t*)=0, *G*(*t*)=0, *t*>0 и *r*=1. Характер изменения переменных этого портрета соответствует оптимальной по быстродействию системе управления второго порядка (два интегрирующих звена).



Рис. 2.2. Фазовый портрет системы управления

В табл. 2.1 и на графике рис. 2.3 иллюстрируется режим стабилизации при управлении объектом. Начальное значение ошибки равно 0,4. Как видно из графика, ошибка от первоначального значения устремляется к нулевому уровню. Из графика на рис. 2.4 и табл. 2.1 видно, что ошибка установившегося процесса ограничивается уровнем ≈*0,5с\** (*с\*=0,001)*, что соответствует теоретической оценке (2.11); длительность переходного процесса равна ≈*40* шагов, что также соответствует теоретическому (2.12) значению (*≈ 41*). На рис. 2.5 представлен вид функции управления *U(t)*.

На рис. 2.6 демонстрируется зависимость ошибки управления от времени в режиме слежения при интенсивных (относительно *с\**) возмущающих воздействиях. В данном опыте не использовалась адаптация. Это означает, что значение *с\** оставалось неизменным с течением времени. Как показано на графике, значение средней ошибки .

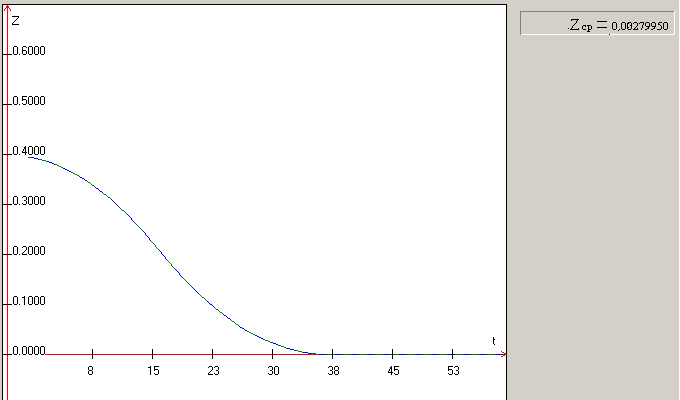


Рис. 2.3. График переходного процесса (отсутствуют внешние возмущения)

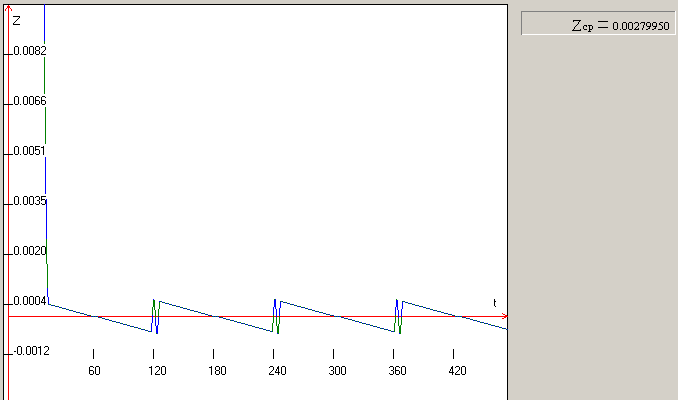


Рис. 2.4. График установившегося процесса (укрупненный масштаб

графика по рис. 2.3)

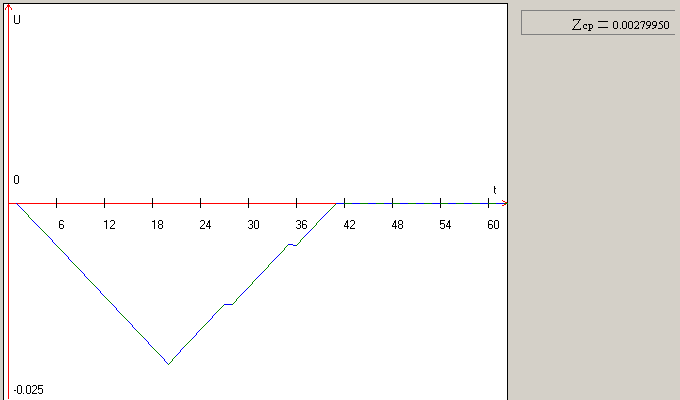


Рис. 2.5. График изменения управляющего воздействия

Таблица 2.1

| № шага |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0,4000 | 0,0000 | 0,0000 | 0 |
| 1 | 0,3994 | 0,3995 | 0,4005 | 1 |
| 2 | 0,3978 | 0,3962 | 0,3982 | 1 |
| 3 | 0,3951 | 0,3907 | 0,3939 | 1 |
| 4 | 0,3913 | 0,3831 | 0,3873 | 1 |
| 5 | 0,3865 | 0,3734 | 0,3786 | 1 |
| 6 | 0,3807 | 0,3614 | 0,3677 | 1 |
| 7 | 0,3738 | 0,3473 | 0,3547 | 1 |
| 8 | 0,3658 | 0,3310 | 0,3395 | 1 |
| 9 | 0,3568 | 0,3126 | 0,3221 | 1 |
| 10 | 0,3467 | 0,2919 | 0,3025 | 1 |
| 11 | 0,3356 | 0,2691 | 0,2807 | 1 |
| 12 | 0,3234 | 0,2441 | 0,2567 | 1 |
| 13 | 0,3101 | 0,2168 | 0,2305 | 1 |
| 14 | 0,2958 | 0,1874 | 0,2021 | 1 |
| 15 | 0,2804 | 0,1557 | 0,1715 | 1 |
| 16 | 0,2639 | 0,1217 | 0,1386 | 1 |
| 17 | 0,2464 | 0,0856 | 0,1035 | 1 |
| 18 | 0,2278 | 0,0471 | 0,0662 | 1 |
| 19 | 0,2081 | 0,0064 | 0,0266 | 1 |
| 20 | 0,1885 | -0,0365 | -0,0153 | 1 |
| 21 | 0,1700 | -0,0317 | -0,0116 | 1 |
| 22 | 0,1526 | -0,0282 | -0,0092 | 1 |
| 23 | 0,1363 | -0,0248 | -0,0068 | 1 |
| 24 | 0,1210 | -0,0214 | -0,0046 | 1 |
| 25 | 0,1068 | -0,0182 | -0,0025 | 1 |
| 26 | 0,0936 | -0,0151 | -0,0004 | 1 |
| 27 | 0,0810 | -0,0121 | 0,0015 | 0 |

Окончание табл. 2.1

| № шага |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 28 | 0,0689 | -0,0253 | -0,0116 | 1 |
| 29 | 0,0579 | -0,0219 | -0,0093 | 1 |
| 30 | 0,0479 | -0,0191 | -0,0076 | 1 |
| 31 | 0,0390 | -0,0164 | -0,0059 | 1 |
| 32 | 0,0311 | -0,0137 | -0,0043 | 1 |
| 33 | 0,0243 | -0,0111 | -0,0028 | 1 |
| 34 | 0,0186 | -0,0086 | -0,0013 | 1 |
| 35 | 0,0133 | -0,0061 | 0,0001 | 0 |
| 36 | 0,0086 | -0,0117 | -0,0054 | 1 |
| 37 | 0,0050 | -0,0090 | -0,0038 | 1 |
| 38 | 0,0024 | -0,0067 | -0,0026 | 1 |
| 39 | 0,0009 | -0,0044 | -0,0013 | 1 |
| 40 | 0,0004 | -0,0022 | -0,0002 | 1 |
| 41 | 0,0004 | 0,0009 | -0,0001 | 0 |
| 42 | 0,0004 | -0,0001 | 0,0009 | 0 |
| 43 | 0,0004 | -0,0001 | 0,0009 | 0 |
| 44 | 0,0004 | -0,0001 | 0,0009 | 0 |
| 45 | 0,0004 | -0,0002 | 0,0009 | 0 |
| 46 | 0,0003 | -0,0002 | 0,0008 | 0 |
| 47 | 0,0003 | -0,0002 | 0,0008 | 0 |
| 48 | 0,0003 | -0,0002 | 0,0008 | 0 |

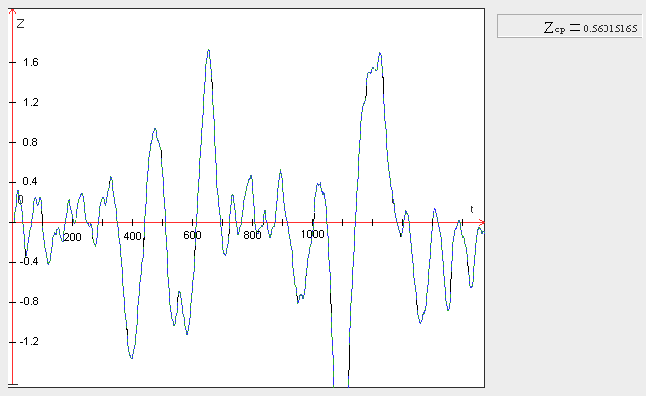


Рис. 2.6. График изменения ошибки управления (без адаптации)

На рис. 2.7 приведены результаты моделирования системы управления, работающей в режиме слежения при тех же, что и на рис. 2.6, возмущениях, но с включенной адаптацией. Для обеспечения возможности проведения эксперимента с адаптацией при тех же возмущениях, как и без адаптации, необходимо в программной модели предусмотреть возможность сохранения и последующего использования вектора возмущений. Начальное значение *с\*=0,001*. При моделировании в зависимости от знака () происходит увеличение или уменьшение значения *с\**. В случае  *= +1* происходит увеличение *c\*;* в противном случае происходит уменьшение *c\**. Как видно из графиков на рис. 10, увеличение *c\** происходит до некоторого значения, а затем появляются частые переключения величины , означающие, что *c\** достигло значения, оптимального для текущей интенсивности возмущений.

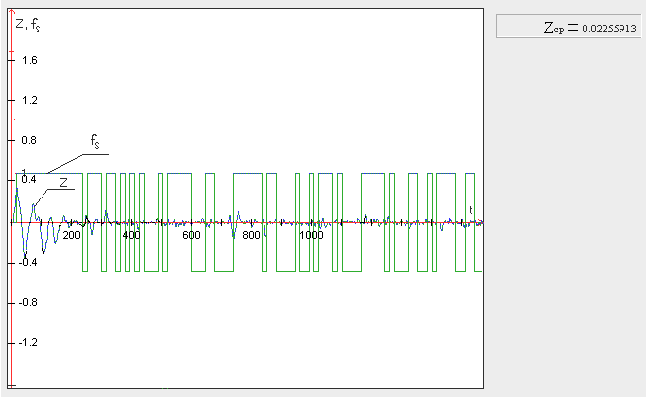


Рис. 2.7. График изменения ошибки управления (с адаптацией) и переменной *fs*

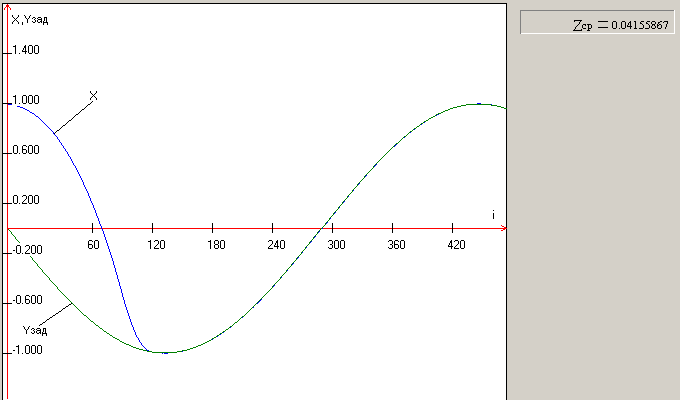


Рис. 2.8. График ошибки управления при синусоидальном задающем воздействии

На рис. 2.8 приведены результаты моделирования системы управления при наличии постоянно изменяющегося задающего воздействия; в качестве функции задающего воздействия была использована синусоида.

Обращаем внимание на характер переходного процесса (*x*0=1; *yзад.*0=*sin*(0)=0), который протекает без заметного перерегулирования. После завершения переходного процесса траектории задающего воздействия и координаты состояния практически сливаются.

**Контрольные вопросы**

1. Перечислите возможности, которые представляются при использовании методологии Д-преобразования второго порядка для комплексного решения вопросов синтеза алгоритмов цифрового управления.

2. В чем состоит принципиальное отличие в представлении линейных и нелинейных дифференциальных уравнений движения объекта?

3. В чем состоит сущность решения задачи синтеза алгоритмов цифрового управления на основе оптимизированных дельта-преобразований второго порядка?

4. Для объектов какого типа представляет особый интерес применение методологии Д-преобразования второго порядка для решения задачи синтеза?

5. Почему при использовании рассматриваемой методологии для синтеза алгоритмов цифрового управления представляются возможности гарантированного обеспечения показателей качества по точности и быстродействию как для линейных, так и нелинейных объектов?

6. В чем сущность использования описанных в гл.1 алгоритмов адаптации для цифрового управления при неконтролируемых внешних воздействиях?

7. Поясните структурную схему системы цифрового автоматического управления?

8. К какому виду должны быть приведены уравнения движения объекта перед решением задачи синтеза?

9. Перечислите основные шаги синтеза алгоритмов цифрового управления на основе Д-преобразований второго порядка.

10. Какие алгоритмы дельта-преобразований второго порядка наиболее целесообразно использовать для решения задачи синтеза и почему?

11. При необходимости введения дополнительной дискретизации какие алгоритмические возможности можно использовать для исключения дополнительных измерений координат состояния?

12. Что такое квант преобразования и как он влияет на показатели качества по точности и быстродействию алгоритма цифрового управления?

13. Приведите оценки длительности переходного и ошибки установившегося процесса управления при отсутствии внешних возмущающих воздействий.

14. Что такое процесс стабилизации и процесс слежения?

15. В каких случаях целесообразно применять алгоритмы адаптации?

16. Преобразуйте заданную преподавателем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений движения первого порядка в дифференциальное уравнение второго порядка.

**ГЛАВА 3**

**ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ**

**Д-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

## 3.1. Параллельные вычислительные процессы и

## Д-преобразования

Современный уровень развития микроэлектроники и вычислительной техники обеспечивает возможность создания высокопроизводительных и эффективных систем для решения технических задач гражданского и оборонного назначения. Однако с развитием науки и техники, расширением сферы роботизации, увеличением скоростей, совершенствованием и созданием новых технологий появляются более высокие и противоречивые требования по реализации многих задач, а также новые более сложные задачи. В связи с этим использование даже самой современной универсальной вычислительной техники и технологии при построении систем и устройств, работающих в реальном или ускоренном масштабах времени, иногда не позволяет обеспечивать требуемых показателей по быстродействию, затратам оборудования, потребляемой энергии.

Эффективным направлением в решении данной проблемы является создание специализированных вычислительных устройств и систем, обеспечение высокого качественного уровня которых достигается благодаря их проектированию с учетом проблемно-ориентированного назначения, а также использованию специальных эффективных методов организации реализуемого процесса [1, 3, 4, 25, 31]. На современном этапе такие устройства реализуются, как правило, на кристалле с использованием программируемых логических интегральных схем (ПЛИС), а также на основе больших интегральных схем.

При проектировании специализированных цифровых высокопроизводительных устройств и систем сталкиваются с необходимостью организации параллельных вычислительных процессов, сокращения пересылаемых объемов информации, количества одновременно работающих устройств умножения, многоразрядных регистров для хранения информации, упрощения сложных систем обмена информацией, обеспечения высокой производительности вычислителей на шаге (вплоть до реализации функционирования за один такт), высокой скорости протекания переходных (итерационных) процессов в обработке информации. Такие проблемы, в частности, возникают, например, при организации параллельного решения практических задач, сводящихся к задачам вычислительной математики, имитаторов динамических процессов, создании функциональных преобразователей, специализированных управляющих устройств, нейрокомпьютеров, цифровых интегрирующих машин, цифровых фильтров и т.п.

Известны методы приближенного решения систем дифференциальных уравнений и итерационного решения систем алгебраических уравнений, исключающие операцию умножения. При этом, в частности, обеспечивается возможность распараллеливания вычислительных процессов и существенного упрощения систем параллельного обмена информацией [1, 10, 11, 13, 25]. Сущность этих методов состоит в том, что решаемая задача представляется в виде системы разностных уравнений первого порядка. Формирование переменных на каждом шаге решения осуществляется путем вычисления значений первых разностей и последующего использования Д-преобразования (дельта-модуляции) первого порядка. При этом квантованные значения первых разностей этих переменных формируются постоянными по модулю (или равными нулю), и могут быть положительными или отрицательными. Это позволяет заменить умножение полноразрядных чисел на операцию, основной компонентой которой является умножение на , а параллельный обмен организовать на уровне одноразрядных приращений. Среди устройств, реализующих эти методы, наиболее известны цифровые дифференциальные анализаторы [1, 25], цифровые фильтры [31]. Недостатком упомянутых методов является низкая скорость решения, обусловленная медленным характером изменения переменных на основе малых значений квантов первых разностей. С этим же связана и трудность получения высокой точности.

В данном разделе в качестве иллюстрации возможности использования Д-преобразований второго порядка для параллельной обработки информации рассматриваются алгоритмы решения некоторых систем алгебраических уравнений (в работе [16] рассмотрены также решения систем дифференциальных уравнений). Как и при использовании Д-преобразования первого порядка, обеспечивается возможность исключения многоразрядных операций умножения, сокращения информации обмена, упрощения средств коммутации и уменьшения времени обмена в параллельных системах, реализации вычислителя на основе кристалла с регулярной (однородной) структурой. В то же время существенно возрастают шаг решения и скорость протекания итерационных (переходных) процессов при той же погрешности (или повышается точность при одинаковой скорости решения).

С целью упрощения в дальнейшем записи формул вводим компактное обозначение алгоритмов формирования  (знака кванта модуляции Д-преобразовании второго порядка) для  переменных на (*i*+1)-м шаге:

– двоичное Д-преобразование с демодуляцией на основе вторых разностей (1.7)

 (3.1)

– троичное Д-преобразование с демодуляцией на основе вторых разностей (1.10)

 (3.2)

Здесь   номер преобразуемой  и аппроксимирующей  переменных рассматриваемых ниже систем уравнений,   функционал, эквивалентный действию алгоритма для определения . Другие обозначения введены ранее (гл. 1).

## 3.2. Пример алгоритмизации параллельного решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей матрицу постоянных коэффициентов и в общем случае переменные свободные члены [18]. Исходная система

 (3.3)

преобразуется сначала к виду



а затем

 (3.4)

В приведенных системах   матрицы коэффициентов размерности   вектор-столбцы соответственно правых частей и неизвестных системы (3.23) (в частном случае для системы с постоянными свободными членами ;   вектор-столбцы невязок и приближенных значений неизвестных;   независимая переменная; 

Запишем систему (3.24) для дискретных значений независимой переменной :



Производим вычитание полученных систем по уравнениям в соответствии с соотношениями для первых и вторых разностей и получим

 (3.5)

Теперь алгоритм приближенного решения системы (3.3) на основе (3.5) и Д-преобразований второго порядка (3.1), (3.2) можно записать в следующей разностной форме для -го шага:

- демодуляция и формирование результатов решения *Yri*



- формирование второй разности модулируемой переменной

- формирование значений невязок (3.6)



- формирование значений переключающих функций

и знаков квантов вторых разностей переменных (3.1), (3.2)



Сущность процесса решения системы (3.3) на основе алгоритма (3.6) состоит в том, что задаются начальные условия  (в частном случае, например,  тогда соответственно ) и организуется итерационный (переходный) процесс решения до вхождения в установившийся процесс, когда , где   достаточно малые, соответствующие обеспечению заданной точности решения системы величины. Дискретные значения  в (3.6) предполагаются численно определенными на каждом шаге.

При реализации правых частей (3.4) с использованием (3.6) отпадает необходимость применения операций полноразрядного умножения. Например, перед началом решения достаточно ввести новые постоянные величины , а вторые разности модулируемой переменной определять по формуле

 (3.7)

где  или . Вычисления, соответствующие правым частям уравнений (3.5), согласно (3.6), могут выполняться для всех уравнений одновременно (параллельно); при этом, как видно из (3.6), обмен переменными между уравнениями на каждом шаге может осуществляться на уровне значений , т.е. +1 или  (+1 или 0 или ). Приближенное решение может формироваться на основе переменной  (3.6) или ,  При использовании , алгоритм (3.26) более прост. Характер же изменения , более сглаженный по сравнению с , , а значения , во многих случаях в установившемся процессе, оказываются существенно более точными.

Достаточные условия обеспечения ограниченных по модулю значений невязок при решении систем алгебраических уравнений в условиях переходного и установившегося процессов базируются на оценках характеристик Д-преобразований по быстродействию и точности при наихудших воздействиях и являются функцией от значения , где . На основе (3.6) получаем



Как видно из последних соотношений, возмущающие воздействия не зависят от значений ординат и приращений неизвестных, а, следовательно, и от вида процесса (переходного или установившегося).

**Контрольные вопросы**

1. Какие можно выделить пути решения задачи обеспечения достаточной производительности вычислительных средств при работе в реальном времени и условиях с ограничениями по объему оборудования и потребляемой энергии?

2. Какие на практике используются эффективные технологии создания небольших партий вычислительных устройств?

3. В чем состоит сущность использования дельта-преобразований второго порядка для параллельной реализации решения системы линейных алгебраических уравнений?

4. В чем состоит эффективность применения методологии дельта-преобразований второго порядка для построения параллельных проблемно-ориентированных вычислительных устройств?

5. Поясните возможность исключения многоразрядных множительных устройств для реализации правых частей линейных алгебраических уравнений?

6. Поясните возможность упрощения системы параллельного обмена переменными между уравнениями системы?

7. Покажите, что при решении системы линейных алгебраических уравнений с использованием методологии дельта-преобразований второго порядка возмущающие воздействия не зависят от значений ординат и приращений неизвестных как в переходном, так и в установившемся процессе.

**ГЛАВА 4  
ОБРАБОТКА И СЖАТИЕ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ**

**Д-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

## 4.1. Особенности использования алгоритмов Д-преобразований второго порядка для обработки информации в системах связи

Методы кодирования и сжатия сигналов находят применение в разнообразных областях: от передачи и хранения оцифрованных аудиоданных до спутниковых цифровых телекоммуникационных систем. Внимание к сжатию сигналов особенно возросло в связи с доступностью цифровых телекоммуникационных систем и, в частности, систем сотовой связи, систем IP-телефонии и систем видеоконференцсвязи.

В данной главе рассматриваются возможности использования разработанных алгоритмов дельта-преобразований второго порядка для решения некоторых задач обработки функций (сигналов). Предлагаемые алгоритмы характеризуются, по крайней мере, простотой, обеспечением гарантированной гладкости аппроксимирующей функции (демодулированного сигнала), возможностью одновременного решения вопроса сжатия информации, малой трудоемкостью алгоритмов сжатия и восстановления, нелинейностью характера выполняемых преобразований, возможностями задания начальных условий для аппроксимирующей функции в широких пределах отклонения от значения исходного сигнала, высокой производительностью, выражающейся в формировании аппроксимирующей функции  с переменным приращением (производной) на шаге [16, 21, 22].

Рассматриваемые материалы ориентированы, в первую очередь, на программное кодирование источника сигнала с использованием компьютера, хранение компрессированных данных в компьютере и передачу их с использованием компьютерной сети.

Предполагается, что канальное, защищенное от сбоев и потерь кодированиереализуется на системном более низком уровне и обеспечивается высоконадежным на основе современных типовых средств канального кодирования. В то же время для повышения надежности передаваемой по сетевым каналам связи компрессированной информации вместе с достаточно большой группой дельта-бит в каждом пакете (фрагменте) возможна передача начальных условий, обеспечивающих при сбое восстановление непрерывного процесса демодуляции.

В средствах связи на основе дельта-модуляции в 50−60 гг. использовали при построении модуляторов и демодуляторов аналоговые элементы. В связи с этим при построении преобразователей, относящихся к рассматриваемым в данной работе типам, имело место накопление ошибки на приемном конце канала. Это объяснялось практической невозможностью обеспечить абсолютную идентичность аналоговых компонент двух демодуляторов, один из которых расположен на передающем, а другой  на приемном конце. В рамках данной работы предполагается использование только цифровых реализаций алгоритмов дельта-преобразований второго порядка в средствах связи; при этом обеспечивается абсолютная идентичность алгоритмов обоих демодуляторов и всех необходимых для исключения накопления ошибки параметров. В частности, реализация алгоритмов может осуществляться на основе целочисленного программирования. Благодаря отмеченному выше, в рассматриваемых дельта-преобразованиях отсутствует накопление ошибки.

Последовательность дельта-бит, формируемая при преобразовании, характеризуется уникальной совокупностью характеристик, позволяющих выполнять эффективную характеризующуюся низкой трудоемкостью защиту сигналов в реальном масштабе времени. По степени сжатия сигнала при равнозначном качестве восстановления рассматриваемые методы могут уступать известным из технической литературы. Однако возможности обеспечения многократного сжатия при предельной простоте алгоритмов в сочетании с эффективной и экономичной по вычислительной трудоемкости защитой от несанкционированного доступа в реальном масштабе времени, простотой управления степенью сжатия при адаптации к пропускной способности канала связи могут представлять интерес как для широкофункциональных, так и специализированных систем интенсивной многоканальной (многопотоковой) обработки сигналов.

На рис. 4.1 представлена упрощенная структурная схема взаимосвязей модулятора и демодуляторов в цифровой системе связи. При этом в качестве канала связи может выступать, например, локальная, глобальная вычислительная сеть, сеть интернет; возможны другие типы сетей, а также условия обработки, передачи и хранения. Входной непрерывный сигнал поступает в аналого-цифровой (АЦП) преобразователь и далее в кодер (модулятор и восстанавливающий демодулятор); с выхода кодера через сеть связи проходят дельта-биты (знаки квантов преобразования), которые на приемном конце поступают для восстановления аппроксимирующего сигнала в декодер (демодулятор) и на выход через цифроаналоговый преобразователь (ЦАП). В фрагментах ("окнах" передачи) возможна также пересылка начальных условий демодулированной функции, кодов значения , частоты дискретизации. При необходимости на входе сигнала перед АЦП и на выходе после ЦАП могут быть установлены фильтры.













АЦП

Моду­лятор

Канал связи

Демоду­лятор



Демоду­лятор



Начальные условия

Начальные условия



ЦАП

Рис. 4.1. Упрощенная структурная схема взаимосвязей модулятора и демодуляторов в цифровой системе связи

## 4.2. Алгоритмизация процессов преобразования со сглаживанием

Для упрощения записи формул вводим по аналогии с гл. 3 сокращенные формы представления алгоритмов двоичных и троичных Д-преобразований:

– модуляция для разностных преобразований (1.7), (1.10):

 или ; (4.1а)

– модуляция для преобразований с двойным интегрированием (1.8), (1.9), (1.11), (1.12):

 или . (4.1б)

Теперь алгоритм обработки функции (сигнала) для -го шага представим в следующем обобщенном виде (  сигнал или смесь сигнала и помехи (возмущения), предполагается определенность начальных условий):

– для разностных преобразований

 (4.2а)

– для преобразований с двойным интегрированием

 (4.2б)

Особенностью работы с сигналами является то, что, как правило, представляются возможности предварительного накопления определенного количества отсчетов (например, в "фрагменте", "окне") и последующей их обработки с соответствующей задержкой.

Учитывая отмеченное выше, вводим вариант определения значений  и  в (4.2) с помощью следующих простейших соотношений:

 (4.3а)

 (4.3б)

Последние соотношения для  при  записаны, как и в (1.9), (1.12), и позволяют реализовать алгоритмы вычислений с двойным интегрированием, исключающие измерение производной.

Приведенные алгоритмы (4.3) представляют возможность:

– для  использовать оцененные для последующих шагов значения соответствующих приращений или производных;

– для  использовать 

– для  использовать Д-преобразования в тех же режимах, которые рассматривались в предыдущих главах.

Рекомендации (4.3) не следует рассматривать как окончательные: могут быть использованы другие способы оценок  для  (например, другие детерминированные и вероятностные способы усреднения, предсказания и т. п.).

Использование оценок типа (4.3) для  позволяет ослабить негативное влияние возмущающих компонент модулируемого сигнала на формирование прогнозирующей (переключающей) функции алгоритмов дельта-преобразований благодаря введению в алгоритм оцениваемых на основе измеряемых отсчетов последующих шагов приращений (производных) модулируемых функций и соответствующего существенного уменьшения влияния эквивалентных вторых разностей (производных), т.е. внешних возмущений. Обращаем внимание на то, что в алгоритмах дельта-преобразований построение прогнозирующей (переключательной) функции базируется на предположении о равенстве нулю вторых разностей (производных) модулируемой функции (сигнала) на последующих шагах [16].

Построение теоретических характеристик для алгоритмов (4.2), (4.3), с использованием широко распространенных методов исследования линейных цепей в теории обработки сигналов, затруднено нелинейностью (4.1), (4.3).

Однако, не вникая дополнительно в теоретическую сущность вопроса, можно выделить следующие требования и важные для обеспечения качественной обработки сигнала особенности:

1. Перед выполнением дельта-преобразования целесообразно провести фильтрацию сигнала с целью уменьшения влияния на него помех, если в этом имеется необходимость.

2. Аппроксимирующая функция слабо чувствительна к кратковременным возмущениям (помехам), и благодаря этому осуществляет в указанных условиях сглаживание сигнала. Например, при всплеске  наибольшее связанное с этим всплеском изменение приращения  на ()-ом шаге определяется значением , где   малая относительно максимальных значений модулируемых переменных величина, постоянная на определенном интервале и связанная по значению с ошибками и быстродействием (переходными процессами) преобразований (гл. 1). Процессу сглаживания при преобразованиях способствует также использование алгоритмов (4.3) при .

3. Переходный процесс отработки ступени при данном значении  и отсутствии внешних возмущений оптимизирован по быстродействию, а также по точности в конце этого процесса.

4. Определение параметра  целесообразно выполнять с использованием методики, изложенной в разд. 4.3. Применение методов адаптации значения , рассмотренных в гл.1 и нацеленных на использование в системах автоматического управления, для обработки сигналов с фрагментальным накоплением отсчетов могут оказаться мало эффективными в связи с, в частности, со сравнительно медленным характером адаптивного изменения .

5. Увеличение частоты дискретизации, как правило, позволяет повысить точность при одновременном соответствующем снижении уровня компрессии.

6. При увеличении частоты дискретизации в *r* раз (*r*>1) исходные возмущающие воздействия, характеризующие исходный сигнал, уменьшаются в ~ раз; при уменьшении данной частоты (*r*<1) эти воздействия увеличиваются в ~ раз (см. разд. 4.3).

На рис 4.2 представлен иллюстративный пример Д-преобразования  сглаживания для  без адаптации. Здесь сигнал 1 под действием помех (возмущений) принимает вид 2. Аппроксимирующая функция (сигнал) 3 в начальной точке  имеет произвольно выбранные значения () и . Переходный процесс протекает примерно до 8-го шага. Среднеквадратическая ошибка сигнала 2 на интервале  составляет , а аппроксимирующей функции .

Рис. 4.2. Пример сглаживания с использованием Д-преобразования второго порядка

## 4.3. Сжатие информации на основе Д-преобразований второго порядка

При использовании (4.2), (4.3) одновременно реализуется возможность сжатия информации: на каждый временной многоразрядный отсчет  достаточно хранить (передавать) 1 бит (для двоичного) или 12 бита (для троичного преобразования).

Д-преобразования появились и нашли, пожалуй, наибольшее применение в технике связи, телефонии. Разработкам преобразований с двойным интегрированием уделялось особое внимание, так как эти виды «…обладают большим максимальным значением сигнал/шум». Решение задачи обеспечения устойчивости и повышения точности преобразований с использованием предлагаемых алгоритмов создают основу для их перспективного использования в данной области.

Возможности сжатия сигналов рассматриваем, предполагая обработку аудиоданных.

Сущность процессов цифрового кодирования и декодирования состоит в следующем. Оцифрованный с определенной частотой дискретизации входной сигнал поступает в кодер в виде последовательности отсчетов в формате линейной импульсно-кодовой модуляции, которые разделяются во временной области на неперекрывающиеся фрагменты (окна). Возможно проведение классификации каждого фрагмента с точки зрения наличия или отсутствия активного содержания (вокализованный или пауза). В процессе преобразований квант преобразования и промежуточная частота могут быть постоянными или варьироваться с учетом обеспечения определенных уровней качества и компрессии; при варьировании значений кванта преобразования и промежуточной частоты дискретизации осуществляется согласование стыковки соседних аудиофрагментов. После этого к звуковым отсчетам фрагмента применяется алгоритм оптимизированного дельта-преобразования второго порядка со сглаживанием. Полученные компрессированные данные передаются на сторону декодера. В декодере на основании полученной в окне последовательности знаков квантов преобразования, начальных условий и, при необходимости, весов кванта преобразования и промежуточной частоты выполняется декодирование значений отсчетов звукового фрагмента.

Вес кванта преобразования оказывает влияние на характер перегрузок по крутизне и гранулярный шум (шум квантования), причем влияние перегрузки по крутизне оказывает меньшее воздействие на восприятие восстановленного звукового сигнала и отличается от воздействия шума квантования [2, 35]. Ошибка, связанная с перегрузкой по крутизне, коррелируется с исходным сигналом, имеет составляющие, идентичные по частоте и близкие по фазе основным компонентам входного сигнала. Это ослабляет влияние перегрузки по крутизне на качество преобразования (кодирования). Шум квантования практически не коррелирован с исходным сигналом и, следовательно, намного более заметен для слушателя, чем шум перегрузки по крутизне при эквивалентном уровне мощности [35].

Принцип кодирования звуковых данных по отдельным фрагментам позволяет выбрать наилучшую величину веса кванта преобразования для каждого фрагмента, которые, в свою очередь, отличаются различной интенсивностью изменения исходных амплитуд аудиоданных. Поэтому требуется определить наилучшее значение *с\**, являющееся постоянным при обработке текущего фрагмента звуковых данных при данном шаге временной дискретизации , при использовании которого процесс преобразования "в среднем" был бы близок к оптимизированному с точки зрения обеспечения минимума ошибок и динамического быстродействия. При этом медленно действующие с плавным изменением формируемого параметра *с*\* алгоритмы адаптации, рассмотренные в гл.1, оказываются для обработки сигналов в рассматриваемых режимах с фрагментацией малоэффективными.

Пусть исходный сигнал оцифровывается с постоянным на протяженных интервалах отработки всех фрагментов шагом дискретизации , без использования частоты поддискретизации и с использованием окон (фрагментов) размером *R* отсчетов; используется алгоритм Д-преобразований на основе вторых разностей. Для получения приближенной оценки модуля кванта преобразования  в *n*-м фрагменте в качестве базовых принимаем соотношения для случая действия наихудших воздействий:

, .

Рассмотрим далее средние значения возмущающих воздействий на интервале преобразования:

;

Принимаем для среднего значения максимального уровня наихудших воздействий *n*-го фрагмента:

,

и, используя для приближенного решения данной задачи соотношения оптимизации, получаем:

  (4.4)

Значение *k*, заданное в указанных пределах, уточняется при проведении экспериментов. Данный простейший способ определения  не следует рассматривать как строго оптимальный, поэтому могут использоваться и другие способы, например, на основе анализа средних значений приращений.

Частота дискретизации, определяемая шагом  или с учетом дополнительного дробления данного шага, в процессе всей продолжительности преобразований может быть постоянной.

Однако необходимость оперативного управления промежуточной частотой дискретизации в процессе компрессии и передачи информации возникает, например, в связи со следующими обстоятельствами:

- обеспечение наилучшего качества кодирования при допустимой степени компрессии;

- наибольшее сжатие при достаточном качестве кодирования;

- обеспечение компрессии, соответствующей текущей пропускной способности сети передачи данных при возможном временном ухудшении или улучшении качества кодирования.

Формирование промежуточной частоты дискретизации (поддискретизации), и как следствие, управление качеством кодирования и скоростью выходного битового потока кодера возможно (рис. 4.3) посредством добавления промежуточных отсчетов (учащения) во фрагменты звуковых данных путем интерполяции или удаления отсчетов звуковых данных из аудиофрагмента (прореживание).



Рис. 4.3. Формирование промежуточной частоты дискретизации

Введение адаптационного управления частотой поддискретизации позволяет в значительной мере улучшить характеристики процесса передачи и самой передаваемой компрессируемой информации по каналам связи с нестационарным характером загруженности. При этом в периоды “критической” перезагруженности осуществляется текущее понижение частоты вплоть до уровней, допускающих существенное ухудшение качественных характеристик восстанавливаемого сигнала. В то же время при кратковременных “критических” перезагруженностях на слух искажения аудиосигнала могут быть практически незаметны, а при продолжительных периодах работы без перезагруженности возможно повышение качества до высоких уровней.

Рассмотрим особенности пересчета значения  при введении частоты поддискретизации. Предельное соотношение для наихудших воздействий представляется в виде

 (4.5)

Для исходной частоты дискретизации можем записать



Вводим частоту поддискретизации для *n*-го фрагмента:



Таким образом, частоту поддискретизации  определяем как измененную частоту дискретизации  путем ее умножения на коэффициент . При этом предполагаются такие значения *,* при которых значение  увеличивается или уменьшается в целочисленное количество раз.

Разделим правую и левую часть соотношения (4.5) на  и определим оценку наихудших воздействий с учетом введения поддискретизации :



Таким образом, увеличение частоты поддискретизации (>1) приводит к уменьшению в  раз исходных наихудших возмущающих воздействий, а уменьшение данной частоты (<1)  к увеличению этих воздействий в  раз. Применяя к полученному заключению ту же методику, что и для рассмотренного выше определения , получаем соотношение для определения значения параметра  также и с учетом введения частоты поддискретизации:

.

Теперь соотношения для определения соответствующей частоты поддискретизации можно представить в следующем виде :

;

;



Введение частоты поддискретизации приводит соответственно к изменению интенсивности дельта-битового потока фрагмента для целочисленных показателей дискретизации в ~*r* раз, так как количество отсчетов в окне становится равным ~*Rr*.

Если частота поддискретизации предыдущего фрагмента звуковых данных отличается от частоты поддискретизации текущего фрагмента, то необходимо учитывать необходимость согласованной стыковки соседних фрагментов при модуляции и демодуляции сигнала во избежание нежелательных дополнительных искажений.

Возможны несколько вариантов решения данного вопроса.

Наиболее простой по вычислительной трудоемкости и способный к быстрому восстановлению сигнала при потерях дельта-бит, но несколько более затратный с точки зрения объема пересылаемой информации базируется на передаче для *n*-го фрагмента начальных значений  и  (или  и ). В данном случае процессы модуляции и демодуляции на *n*-ом фрагменте начинаются с 2-го шага.

Для случая передачи дельта-бит без сопровождения начальными условиями для фрагмента пересчет относящегося к (*n*-1)-му фрагменту и являющегося начальным значением *n*-го фрагмента демодулированного приращения можно выполнять по формулам, вытекающим из простых геометрических соотношений:



В данном выражении   приращение аппроксимирующей функции (*n*-1)-го фрагмента, формируемое в условиях использования частоты поддискретизации этого фрагмента,   приращение аппроксимирующей функции при использовании в *n*-м фрагменте, пересчитанное с учетом условий стыковки ( и ). В данном случае процессы модуляции и демодуляции на *n*-м фрагменте начинаются с 1-го шага.

При использовании (4.2), (4.3) одновременно реализуется возможность сжатия информации: на каждый временной многоразрядный отсчет  достаточно хранить (передавать) 1 бит (для двоичного) или 1  2 бита (для троичного преобразования).

## 4.4. Особенности применения дельта-преобразований второго порядка для защиты сигналов от несанкционированного доступа

Широкое применение информационных технологий и средств связи в автоматизированных системах обработки информации и управления определило актуальность и остроту проблемы защиты от несанкционированного доступа информации, передаваемой по общедоступным каналам связи. Особое место в решении данной задачи занимает надежная защита в реальном масштабе времени сигналов, и в частности, речевой информации, что обуславливается грандиозными достижениями в области компьютерной и сотовой телефонии, развитии средств мультимедиа и методов передачи аудиовидеоинформации по компьютерным сетям. В рамках данного раздела возможности защиты будут рассматриваться с ориентировкой на защиту речевых сигналов; в то же время эти возможности могут быть использованы и для сигналов других типов.

Для речевых сообщений в настоящее время существует две наиболее распространенные материальные формы – аналоговое и цифровое представление сигналов, что обусловило использование в качестве технологий безопасности речевой связи в открытых каналах двух подходов: скремблирования и криптографической защиты. Первый подход традиционно используется для аналоговых сигналов, тогда как второй применяется для дискретных сообщений. Применение методов скремблирования для защиты речевых сообщений в цифровом представлении не получило широкого распространения, так как защитные преобразования скремблирования для цифровых речевых сигналов характеризуются высокой ресурсоемкостью, а уровень остаточной разборчивости таких методов довольно высок.

Наибольший интерес представляет криптографическая защита речевых оцифрованных сигналов, поскольку она обеспечивает большую стойкость по сравнению со скремблированием [29]. В настоящее время для защиты речевой информации используются унифицированные методы дискретной криптографии (процедуры шифрования на основе блочных шифров), которые в большинстве своем не учитывают специфику формирования речевых сообщений и не соответствуют требованиям по быстродействию для большинства современных подлежащих работе в реальном масштабе времени приложений.

Для снижения трудоемкости и повышения быстродействия процедур защиты целесообразно использовать меньшее число раундов криптографических преобразований; однако при снижении числа раундов необходимо обеспечить приемлемую стойкость. Одним из путей решения этой проблемы является использование быстродействующих алгоритмов сжатия речевых сообщений для сокращения объема информации и построения на их основе параметризованных алгоритмов защиты с учетом информационных характеристик сжатого потока для создания большей неопределенности при решении задачи криптоанализа.

Большинству реальных источников сообщений присущи статистические зависимости и вероятности их появления распределены неравномерно. Поэтому в большинстве методов компрессии стремятся достичь минимальной длины кодового слова в среднем по всем символам исходного алфавита, что достигается использованием в качестве базовой стратегии сжатия неравномерности распределения, поэтому для кодирования часто встречающихся символов используются более короткие кодовые слова, чем для редко встречающихся, за счет чего и осуществляется сжатие информации. Однако при этом не устраняются статистические характеристики исходных данных, поскольку для известной таблицы кодов (частот появления символов) при криптоанализе возможно построение модели открытого текста на основе кодовой таблицы. В этом смысле большинство существующих методов компрессии не устраняют частотные характеристики входного потока, а лишь осуществляют сжатие за счет использования переменного числа разрядов для кодирования разных символов алфавита.

В работе [37] определены условия, определяющие наибольшую благоприятность для эффективного решения задачи защиты информации от несанкционированного доступа, которые можно сформулировать в следующем виде:

1. Близость распределения последовательности кодов сообщений к равновероятному.

2. Близость длины кодов сообщений к минимально достижимому, т.е. к единице.

3. Способность последовательности сообщений к разрушению при изменении хотя бы одного из них.

В данном разделе рассматривается возможность строить алгоритмы эффективной защиты сигналов на основе дельта-преобразований второго порядка и использования свойств дельта-последовательностей.

В качестве важных свойств дельта-последовательностей с рассматриваемой точки зрения можно выделить следующие:

1. При использовании двоичных алгоритмов Д-преобразований длина сообщения соответствует предельно-минимальной, т.е. одному биту (кодирование знака кванта преобразования).

2. Распределение дельта-бит близко к равновероятному, причем эта близость усиливается с повышением частоты дискретизации.

3. Изменение хотя бы одного дельта-бита приводит к искажению (разрушению) восстанавливаемого демодулированного сигнала.

Каждое сообщение компрессированного речевого сигнала можно рассматривать как один дельта-бит, с помощью которого кодируется знак кванта преобразования. Благодаря этому Д-преобразование в сильной степени устраняет статистическую избыточность, свойственную данным входного потока.

Основанием для формирования последовательности дельта-бит близкой к равновероятному распределению является то, что исходный речевой сигнал характеризуется колебаниями; соответственно демодулированный сигнал имеет вершины-максимумы и вершины-минимумы. В связи с тем, что приращение демодулированного сигнала формируется путем накопления положительных и отрицательных постоянных по модулю величин, количество положительных и отрицательных дельта-бит ("0" и "1") между упомянутыми вершинами всегда одинаково; одинаково это количество соответственно и на длинных промежутках, охватывающих множество вершин. С повышением частоты дискретизации количество дельта-бит пропорционально увеличивается, а их распределение при неизменном модуле кванта модуляции становится ближе к равновероятному.

Формирование демодулированной функции на основе пошаговых значений квантов модуляции представляет собой, в частности, зависимость от количества шагов. Проиллюстрировать эту зависимость демодулированной функции от предшествующих значений дельта-бит и веса кванта преобразования можно с использованием следующей записи ():

.

Как видно из рассмотрения данного выражения, изменение одного дельта-бита, отстоящего от *i*-го отсчета демодулированного сигнала на *i*-шагов вносит в этот отсчет ошибку величиной ; на протяженном интервале данная ошибка растет и приводит к разрушению сигнала. Одновременно следует отметить зависимость процесса демодуляции от значений начальных условий, которые могут передаваться в фрагментах (окнах) регулярно или в соответствии с формируемыми условиями. Исходя из этого, возможно использование операций перекодирования группы бит Д-последовательности и начальных условий в качестве составной части алгоритма защиты речевой информации на основе оптимизированных Д-преобразований.

Рассмотренные выше свойства кодированного сигнала на основе Д-преобразований второго порядка в значительной мере соответствуют указанным выше наиболее благоприятным.

Отмеченные свойства дельта-последовательностей позволяют использовать более простые алгоритмы криптографических преобразований, обеспечивающие защиту Д-последовательностей с обеспечением достаточной стойкости против несанкционированного доступа, что создает перспективы для использования Д-преобразований с защитой в реальном масштабе времени [12].

**Контрольные вопросы**

1. В чем преимущество цифрового кодирования сигналов по сравнению с аналоговым представлением в системах связи?

2. Почему существует острая необходимость компрессии сигналов в системах связи?

3. В чем сущность компрессии сигналов на основе дельта-преобразований?

4. Нарисуйте и поясните упрощенную структурную схему цифрововой системы с кодированием и декодированием сигнала на основе дельта-преобразований второго плорядка.

5. Какие алгоритмы дельта-преобразований второго порядка и почему предпочтительно использовать для копрессии сигналов?

6. Какие возможности представляет представление отсчетов кодируемого сигнала пакетами в виде "окон"?

7. Почему для повышения качественных характеристик аппроксимирующего аудиосигнала нецелесообразно использование алгоритмов адаптации, приведенных в гл.1?

8. В чем состоит сущность сглаживания аппроксимирующего аудиосигнала на основе использования набора отсчетов преобразуемого сигнала в пределах "окна"?

9. На какие характеристики аппроксимирующего сигнала влияет значениt кванта преобразования?

10. Какое влияние на характеристики компрессии аудиосигнала оказывает введение управляемого учащения и прореживания отсчетов?

11. В чем состоит характер эквивалентного действия внешних возмущающих воздействий при изменении дискретизации в *rn* раз?

12. Запишите и поясните соотношения для определения частоты поддискретизации.

13. Сформулируйте условия, определяющие наибольшую благоприятность для эффективного решения задачи защиты информации (сигнала) от несанкционированного доступа.

14. Охарактеризуйте особенности преобразованного на основе дельта-преобразований второго порядка аудиосигнала в последовательность дельта-бит с точки зрения соответствия наибольшей благоприятности для эффективной защиты от несанкционированного доступа.

**ГЛАВА 5**

**ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПОВ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

## 5.1. Дельта-преобразования второго порядка и постановка задачи построения сплайна

При проектировании сложных по конфигурации динамических двух- и трехмерных объектов возникает потребность моделирования в реальном времени с визуализацией на основе компьютерной графики. Это могут быть самолеты, ракеты, надводные суда и другие объекты, имеющие достаточно сложную форму. Возникает также необходимость моделирования в масштабе реального времени сложных поверхностей, траекторий со специфичными требованиями к гладкости линии траекторного пути (траектория полета летательных аппаратов, снарядов, движения судов и других объектов), интерполирования сложных функций и пр.

В решении такого рода задач важное место занимает использование сплайн-функций. Построение сложных динамически изменяющихся в реальном времени изображений на экране компьютерного монитора связано с рядом известных требований и ограничений: необходимость обеспечения высокой частоты формирования и следования кадров, высокая пиксельная разрешающая способность экрана и большой размер экрана, а соответственно высокие уровень детализации отдельных компонент изображения и вычислительная трудоемкость формирования кадра, ограниченность производительности компьютера и объема доступной при пиковой производительности памяти, качественные характеристики формируемых кривых и поверхностей. В связи с отмеченным, можно выделить следующие важные характеристики алгоритмов, реализующих сплайн-функции: вычислительная трудоемкость, характеризующая быстродействие алгоритмов; объем информации, необходимый для хранения параметров кривой; гладкость кривой; возможности определения значений производных в узлах интерполяции и некоторые другие.

В технической литературе освещено множество различных сплайнов, отличающихся трудоемкостью, гладкостью, функциональными возможностями [30]; это множество позволяет подбирать для решения конкретной задачи такие сплайны, которые обеспечивают необходимую точность интерполяции и, по необходимости, низкую вычислительную трудоемкость. Например, в станках с программным управлением особенно остро стоит вопрос точности обработки деталей.

В компьютерной графике при построении визуальных изображений на экране монитора высокая точность не требуется, так как глаза практически не замечают небольших интерполяционных ошибок в деталях изображений. Поэтому в связи с проблемой обеспечения высокой скорости формирования кадров для компьютерной графики необходимы сплайны, которые, помимо гладкости, обеспечивают, по крайней мере, низкую вычислительную трудоемкость. Наличие же наборов сплайнов такого типа, которые имеют существенное отличие в алгоритмическом обеспечении и, в связи с этим, характеризуются специфическими функциональными возможности в реализации задачи интерполяции, может создавать основу для выбора наиболее эффективных сплайнов (алгоритмов) для решения каждой конкретной задачи при наименьших вычислительных ресурсах.

В данной главе рассматриваются алгоритмы построения сплайновых кривых, построение которых базируется на основе использования принципов дельта-преобразований второго порядка [16, 20]; применение этих алгоритмов позволяет в значительной мере решать вопросы обеспечения упомянутых выше требований.

В качестве сплайна на основе дельта-преобразований второго порядка будем понимать локально независимую одномерную функцию, проходящую через узлы интерполяции, обладающую гладкостью 1-го порядка и удовлетворяющую краевым условиям в виде значений заданных отсчетов и их производных. При этом значения вторых производных на интервале интерполяции между заданными отсчетами постоянны по модулю и имеют не более двух интервалов знакопостоянства. Последнее положение в рамках аналогии согласуется с известными определениями для оптимальной по быстродействию системы непрерывного управления непрерывным объектом, описание которого включает два последовательных интегрирующих звена [26, 27]. В то же время задача построения сплайна отличается по исходной постановке и набору конечных результатов, которые необходимо определить, а также решается с учетом дискретизации независимой переменной.

По существу сплайн включает в общем случае две траектории, которые реализуют участки «разгона» (траектория *B*) и «торможения» (траектория *A*). Исходные, соответствующие этим участкам, дифференциальные уравнения можно записать в виде (рис. 5.1):

 (5.1*А*)

. (5.1*B*)





























Рис. 5.1. Интерполяционная кривая, включающая траектории *А* и *В*

Здесь   интерполирующая функция;   значение кванта преобразования; *tП* – точка переключения знака кванта преобразования;  – краевые условия в узлах интерполяции; *T* – интервал между узлами интерполяции; *D* – расположение точки *tП* переключения знака кванта модуляции.

Решение данной задачи можно представить в виде составных частей:

1. Определение (при необходимости)  и .

2. Нахождение параметров P () и D.

3. Построение собственно сплайна на основе найденных параметров.

Используемые в данной главе обозначения формул (5.ХА) и (5.ХB) соответствуют представлению соотношений для траекторий *А* и *В* (рис. 5.1).

## 5.2. Алгоритмизация построения сплайн-функций на основе дельта-преобразований второго порядка

В работах [15, 16] подробно изложены теоретические обоснования алгоритмов для построения сплайнов на основе дельта-преобразований второго порядка.

Для упрощения и более обобщенного представления формул будем использовать обозначения пар координат узловых точек в виде , где *n*  номер узла интерполяции, при этом расположение значений независимой переменной между соответствующей парой узлов (на участке интерполяции) может быть произвольным.

Сущность построения сплайна как интерполирующей функции одной переменной состоит в следующем. Задаются значения отсчетов и производных в узлах интерполяции, причем производная в узле имеет одно значение как при рассмотрении слева, так и справа. Рассчитываются параметры *P* и *D* для каждого участка и выполняется построение собственно сплайна.

Производные в узлах могут быть исходно заданы или определены одним из известных способов, например, с использованием следующего алгоритма для *M* узлов:

1. Задать значение  и , где   количество узлов; например,

 и .

2. В промежуточных узлах производные определять в соответствии с выражением

; .

Выражения для вычисления значения кванта преобразования *P****n*** и расстояние от узла (*n*+1) до точки переключения знака кванта преобразования *D****n*** можно вычислять по следующим формулам:



,  
где

;

.

В случае  или *L*=0 принимается.

Перед построением сплайна задается порядок дискретного изменения независимой переменной *t* между узлами интерполяции; в частном случае независимая переменная может изменяться с некоторым постоянным, по крайней мере между парой узлов, шагом . При этом следует учитывать ограничения изменения независимой переменной в пределах соответствующих траекторий.

Построение сплайна на *n-*ом участке может осуществляться по следующим формулам:

;  (5.1A)

;  (5.1B)

При использовании постоянного шага изменения независимой переменной можно также использовать другие формулы построения сплайна, по содержанию соответствующие соотношениям для алгоритмов дельта-преобразований второго порядка и эквивалентные (5.1) для изменяемой с шагом  независимой переменной.

Пусть  – шаг дискретизации независимой переменной, – количество дискретных шагов по траектории *А*,  – количество дискретных шагов по траектории *В*.

Из узла *n*+1 по траектории *А* строится кривая с движением влево шагом  на расстояние *Dn* до точки переключения кванта модуляции ( шагов). Расчет выполняется по формулам:

; ;

; ;

; (5.2A)

;

где *i* = 0,... , .

Далее из узла *n* по траектории *В* строится кривая при движении вправо с шагом  на расстояние () до точки переключения кванта модуляции ( шагов). Расчет выполняется по формулам:

; ;



; ;

; (5.2B)

,

где *i* = 0,..,, .

Можно показать, что интерполяция на основе (5.2) может быть реализована без использования операций умножения полноразрядных чисел; при этом на один интерполируемый отсчет (шаг) требуется три операции сложения, что характеризует, вероятно, предельно достижимую по нижнему уровню вычислительную трудоемкость выполнения данных действий для сплайнов.

Предположим, что на подготовительном этапе помимо отмеченных выше значений  и  определены также , , . Теперь (5.2) по соответствующим траекториям можно представить в следующем виде:

;

;



,

где *i* = 0,... , .

;

;

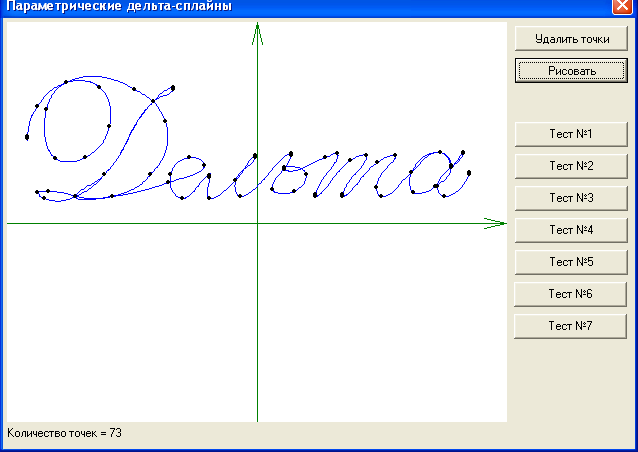
,

где *i* = 0,..,, .

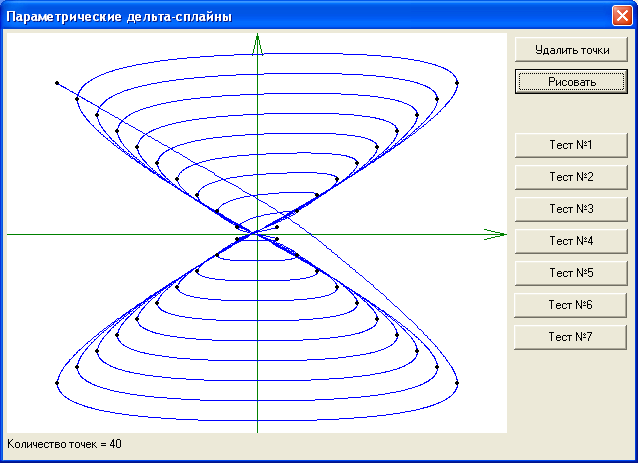
Параметрические двумерные и трехмерные кривые, поверхности строятся на основе известных принципов с использованием параметрических представлений сплайнов [30].



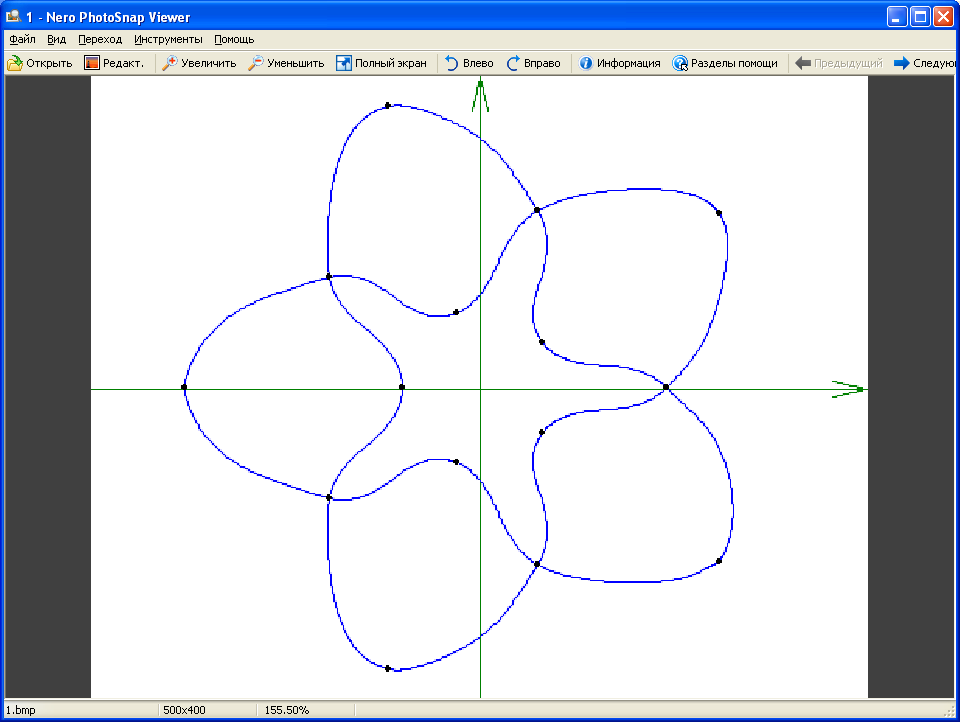
Ниже на рис. 5.2, а, б, в, г представлены примеры формирования двумерных и трехмерных графических изображений с использованием дельта-сплайнов. Точками выделены узлы интерполяции.



а

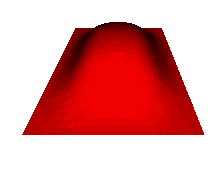


б

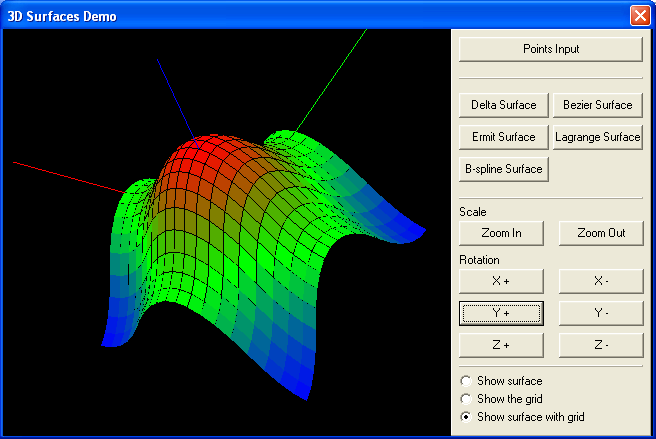


в

Рис. 5.2. Примеры формирования двумерных и трехмерных графических изображений с использованием дельта-сплайнов



г



д

Рис. 5.2. Продолжение

**Контрольные вопросы**

1. В чем состоит практический интерес использования сплайнов в компьютерной графике?

2. В чем состоит специфика требований к алгоритмам построения сплайнов для компьютерной графики?

3. В чем состоит сущность метода построения сплайна на основе принципов дельта-преобразований второго порядка?

4. Объяснить смысл процедуры расчета производных.

5. Какой минимальный набор исходных данных необходим для реализации расчета и построения сплайнов на основе дельта-преобразований второго порядка?

6. Поясните сущность параметрических компонент  и  алгоритма для построения сплайна.

7. Оцените трудоемкость формирования интерполяционных отсчетов при движении с дискретным шагом  на основе известных (заблаговременно рассчитанных) значений  и .

8. Поясните возможность формирования интерполяционных отсчетов при движении с дискретным шагом без использования операций умножения полноразрядных чисел.

9. В чем состоят достоинства и недостатки рассматриваемых алгоритмов на основе дельта-преобразований второго порядка?

10. Предложите наиболее перспективные с точки зрения эффективности по вычислительной трудоемкости варианты практического использования рассматриваемых алгоритмов построения сплайнов в компьютерной графике при разделении процессов расчета параметров ,  и выполнения собственно интерполяции.

**Библиографический список**

1. Алексенко А.Г., Каляев А.В., Лукиенко В.И., Макаревич О.Б., Мышляев В.Н Перестраиваемые цифровые структуры на основе интегрирующих процессоров/ Под ред. А.В. Каляева. – М.: Радио и связь, 1982.
2. Венедиктов М.Д., Женевский Ю.П., Марков В.В., Эйдус Г.С. Дельта-модуляция. Теория и применение. – М.: Связь, 1976.
3. Золотухин Ф.Ф., Гречишников А.И., Поляков В.В., Семейство однокристальных специализированных цифровых сигнальных ПЛИС-процессоров с ориентацией на предельное быстродействие и модульные системы на их основе. Сб. докл. III научной конференции по гидроавиации «Гидроавиасалон-2000», 6-10 сентября 2000. – С. 340-343.
4. Каляев А.В. Теория цифровых интегрирующих машин и структур. – М.: Сов. радио, 1970.
5. Клюев А.С., Колесников А.А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. – М.: Энергоиздат, 1982.
6. Колесников А.А., Гельфгат А.Т. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. – М.: Энергоатомиздат, 1993.
7. А.с. №106036 (СССР). Способ передачи электрических сигналов/ Коробков Л.А. (СССР). Заявл. 26.02.48. Опубл. 25.06.57. БИ, 1957. – №4. –

17 с.

1. Кравченко П.П. Высокопроизводительные алгоритмы дельта-модуляции, оптимизированной по быстродействию и точности //Электросвязь. – 1989. – №9. – С. 44-47.
2. Кравченко П.П. Дельта-модуляция на основе высших разностей и глубокого прогноза //Электронное моделирование. – 1984. – №1. – С. 55-58.
3. Кравченко П.П. Инкрементные методы решения систем линейных алгебраических уравнений // Многопроцессорные вычислительные структуры. – Таганрог, 1983. Вып. 5(XIV). – С. 30-32.
4. Кравченко П.П. О цифровых дифференциальных анализаторах – 40 лет спустя// Материалы Международной НТК «СуперЭВМ и многопроцессорные вычислительные системы МВС`2002». – Таганрог: ТРТУ, 2002.
5. Кравченко П.П. Оптимизированные дельта-преобразования второго порядка – новый эффективный математический аппарат обработки и защиты информации// Труды научно-технической конф. «Информационная безопасность автоматизированных систем». – Воронеж, 1998. – С. 405-409.
6. Кравченко П.П. Оптимизированные дельта-преобразования второго порядка – новый математический аппарат обработки информации и цифрового управления// Материалы Междунар. научно-технической конференции «Искусственный интеллект» в 2-х т, п. Кацивели, Крым, Украина. Т.1. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – С. 310-313.
7. Кравченко П.П. Основы теории оптимизированных дельта-преобразований второго порядка. Цифровое управление, сжатие и параллельная обработка информации: Монография. – Таганрог: ТРТИ, 1997.
8. Кравченко П.П. Синтез алгоритмов управления перевернутым маятником на тележке с использованием аппарата дельта-преобразований второго порядка// Мехатроника, автоматизация, управление. – 2012. – №5(134). – С. 6-14.
9. Кравченко П.П. Оптимизированные дельта-преобразования второго порядка. Теория и применение: Монография. – М.: Радиотехника, 2010.
10. Кравченко П.П. Патент РФ №1112552 на изобретение «Дельта-модулятор». Приоритет 20.04.83 г. Зарегистрирован в Государственном реестре изобретений 22.11.93 г.
11. Кравченко П.П. Решение систем алгебраических и дифференциальных уравнений с использованием разностной модуляции второго порядка //Кибернетика. – 1989. – №2. – С. 65-72.
12. Кравченко П.П., Павлова И.С. Синтез алгоритмов цифрового управления на основе дельта-преобразований второго порядка и разработка программной модели системы: Руководство к лаб. работе № 1 по курсу “Цифровое управление, сжатие и параллельная обработка информации на основе дельта-преобразований второго порядка". – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2010.
13. Кравченко П.П., Бородянский Ю.М. Построение сплайнов и сплайновых поверхностей на основе дельта-преобразований второго порядка: Руководство к лаб. работе №2 и №3 по курсу “Цифровое управление, сжатие и параллельная обработка информации на основе дельта-преобразований второго порядка". – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004.
14. Кравченко П.П., Каграманянц В.А. Метод повышения компрессии аудиосигналов, закодированных на основе оптимизированных дельта-преобразований второго порядка. Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск ”Компьютерные технологии в науке, инженерии и управлении” – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – №5(118). – С. 88-94.
15. Кравченко П.П., Хусаинов Н.Ш., Погорелов К.В., Шкурко А.Н. Программная система аудиовидеоконференцсвязи для локальных и корпоративных IP-сетей. Программные продукты и системы (Software&Systems). – 2004. – №1. – С. 27-30.
16. Крутько П.Д. Синтез нелинейных законов управления дискретных систем /Под ред. В.М. Пономарева //Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1970. – С. 231-265.
17. Меньшиков Г.Г. Исследование погрешностей двухкратной дельта-модуляции //Кибернетика. – 1966. – №2. – С. 18-25.
18. Неслуховский К.С. Цифровые дифференциальные анализаторы. – М.: Машиностроение, 1968.
19. Нетушил А.В. и др. Теория автоматического управления: Нелинейные системы управления при случайных воздействиях / Под ред. А.В. Нетушил. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1983.
20. Павлов А.А. Линейные модели в нелинейных системах управления. – Киев: Техника, 1982.
21. Павлов А.А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. – М.: Наука, 1966.
22. Петраков А.В. Основы практической защиты информации: Учебн. пособие. – 2-е. изд. – М.: Радио и связь, 2000.
23. Плис А.И., Шикин Е.В. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользоватедей. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996.
24. Погрибной В.А. Бортовые системы обработки сигналов. – Киев: Наукова думка, 1984.
25. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.
26. Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю. Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. – М.: Наука, 2011.
27. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х кн.: Пер. с англ./ Под ред. Д.С. Лебедева. – М.: Мир, 1982.
28. Стил Р. Принципы дельта-модуляции / Под ред. В.В. Маркова. – М.: Связь, 1979.
29. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966.
30. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963.
31. Шилейко А.В. Цифровые модели. – М.; Л.: Энергия, 1964.
32. de Jager F. Deltamodulation – a Method of PCM Transmission Using the 1-Unit Code //Philips Research Reports. 1952. V.7, №6. – C. 442-466.
33. Deloraine E.M., van Mierlo S., Derjavitch B. Methode et. Systeme de Transmission par Impulsions. – Франц. пат. ¹932140, заявл. 10.08.46, опубл. 12.03.48. Method and System of Impulse Transmission. – Пат. США ¹2629857, заявл. 24.02.53, опубл. 10.08.66.